

CITLIVÝ CHAOS

*Chtěl bych
jen se pokusit,
prach tohoto světa smýt
kapičkami rosy.*

Bašó

Japonský básník Bašó se narodil roku 1644 v Uenu v rodině samuraje nižší hodnosti ve službách rodiny Tódó. Ve věku čtyřiceti let se vydal na první sérii cest, které zaznamenal v *Pamětech kostry vystavené vlivu počasí*. Jeho výše citovaná báseň popisuje jaro v Saigjóově poustevně: „Pověstné jaro bylo přesně takové, jak jej básník popsal, ronící čiré kapky vody za zvuků kapy–kap.“ Bašó hledal obnovení své identity v meditacích o přírodě a krásu nalézal i ve věcech tak jednoduchých, jako je padající kapka vody. Půjdeme v jeho stopách, ale budeme hledat krásu na opačném pólu, tu matematickou spíš než tu poetickou. Ty dvě spolu souvisejí, obě hledají jednoduchost ve složitosti. Obrazce tvořené proudící vodou kromě Bašóa fascinovaly mnoho dalších lidí. V Královské knihovně ve Windsoru například mají mnoho kreseb spleťtých kaskád od Leonarda da Vinciho (obrázek 68). Výstižně zachytit tečení představuje výzvu pro každého umělce. Lidé, kteří si budou jeho díla prohlížet, dobře vědí, jak se voda chová, a když to obraz nevystihuje dobře, ihned si všimnou, že něco není v pořádku. Ale není to dojem formulovaný vědomě: poznají, že je tam chyba, ale jen zřídka budou tušit, kde by mohla být. Stejně jako já, když se v hospodě podívám na obrázek loveckých koní, vidím, že vypadají nějak prapodivně, a dokonce i tuším, čím to je. Možná je špatně úhel, jak mají při běhu nohy, nebo možná výška koňského těla nad zemí. Ale ani za nic bych nebyl schopný vysvětlit, jak cválajícího koně nakreslit. Leonardo spojil instinkt vědce s viděním umělce a vědomě podnikl kroky pro zlepšení výstižnosti svých děl. Pečlivě prostudoval zvířata, lidské tělo, mraky, stromy – cokoli jen může malíř či sochař chtít zobrazit. A on i jeho současníci věnovali zvlášť velkou pozornost vodě.

Voda se tehdy považovala za jeden ze čtyř živlů, z nichž je stvořen celý vesmír, a tedy byla víc než pouhou kapalinou. Byl to symbol běhu života, protože voda, stejně jako život, *plyne*. Rodí se, vyrůstá, hýbe se, mění se, umírá. Potůček od pramene se promění v bystřinu, řeku, valící se dravý proud, oceán. Řeka může klikatě meandrovat napříč rovinou, vyřezávat hluboké kaňony do prastarých skal uložených na dno moře před stamiliony let, vrhat se do propasti jako velkolepý vodopád nebo se nechat zanést bahnem a rozprostřít se do gigantické delty svého ústí. Z klidného moře se může stát zuřivé monstrum s napěněnými příbojovými vlnami, moře zmítané bouří může znenadání utichnout v klidné a rovné. Německý básník z konce osmnáctého století Friedrich Leopold, Freiherr von Hardenberg, který používal literární pseudonym Novalis, vodu nazýval „citlivý chaos“.

To není špatně vyjádřené.

Tajemství vodovodního kohoutku

Obvykle považujeme vodu za něco samozřejmého. Je to něco, co teče z kohoutku. Málokdy si vzpomeneme na ohromné dílo techniky v pozadí této všední skutečnosti. Až se jednoho dne zřítí viktoriánský tunel, který přivádí vodu právě do našeho kraje, získají takové myšlenky novou dimenzi naléhavosti, ale prozatím, když si myjeme ruce nebo plníme kýbl vodu, jsou naše myšlenky někde daleko.

Jaký nástroj by mohl při noření se do hloubky citlivého chaosu pomoci lépe než obyčejný vodovodní kohoutek?

Podívali jste se někdy, jak teče voda z kohoutku? Myslím *opravdu* podívali, ne že jste do ní strčili kartáček na zuby. Inspirován svou vlastní výřečností jsem to dnes ráno pravděpodobně poprvé v životě udělal. Nemůžu zaručit, že váš kohoutek bude dělat totéž, co dělal můj, ale stejně tento pokus doporučuji,

zjistíte spoustu věcí. Řeknu vám, co jsem viděl já.

Podstatou vědeckých pozorování je systematicčnost. Připouštím, že k mnohým důležitým objevům, jako je třeba antibakteriální působení penicilínu, se dospělo náhodou, ale i ty musejí být potvrzeny a využity metodami systematictějšími. Když bude milion opic bušit do psacích strojů, jednou napíší určitě i *Hamleta*, ale nechtěl bych na to čekat. Takže jsem se pustil do systematictější činnosti. Jak se mění vzhled vody vytékající z kohoutku, když budeme *pomalou* zvyšovat průtok?

Otevřete kohoutek jenom trošku. Co se stane? Kohoutek kape, pochopitelně.

Když se pohyb ustálí, je vidět, že kohoutek kape pravidelně a intervaly mezi jednotlivými kapkami jsou konstantní.

Otevřete kohoutek o maličko víc. Rychlost kapání se zvyšuje, ale stále kape pravidelně. Stále po nepatrných krocích zvyšujete průtok: děje se pořád totéž.

Trpělivost. Život vědce je jedno nekonečné období poklidu přerušované chvilkami dramatu a vzrušení.

Je jistý bod, ve kterém se padající kapky spojí dohromady a utvoří ustálený proud. Máte ho? Dobrá. Ale jsem nucen poukázat na to, že jsme propásli jednu opravdu zajímavou pasáž. *Předtím*, než se kapky spojí v proud, dojde ještě k několika dalším fázovým přechodům poměrně rychle za sebou. Pokud jste byli netrpěliví a zvyšovali průtok po příliš velkých krocích, vraťte se zpátky a zkuste to znovu.

Prvním z těchto přechodů je změna rytmu padajících kapek. Z pravidel - ného *kap—kap—kap* se stane spíš něco jako *kapykap-kapykap-kapykap*, dvoji - ce kapek v rychlém sledu za sebou, pauza, další dvojice. Pořád je to pravidelné, ale je to jiné.

S dobrým vybavením by se vám mohlo podařit najít další změny v rytmu, zase jiné a taky pravidelné. Očima a ušima se mi to nepodařilo. Dál jsem viděl něco mnohem podivnějšího. Kapky začaly padat *nepravidelně*. Už padají poměrně rychle za sebou, ale pořád je vidět a slyšet oddělené kapky. Rytmický zvuk je pryč a vystřídal ho něco mnohem složitějšího.

Takže tady je na rozmyšlení další přechod: kapky, které ztratí rytmus.

Brzy poté, jak už jsem řekl, se kapky spojí v ustálený tok. Tok se může zpočátku ještě v dolní části trhat na jednotlivé kapky, ale brzy začne být klidný a hladký. Tenký zužující se provázek z kohoutku do umyvadla. Specialisté na dynamiku kapalin tomu říkají *laminární* proudění: kapalina se pohybuje v tenkých vrstvách (latinsky *laminae*), které po sobě hladce kloužou, jako když se balíček karet rozhodí po stole.

Zvyšte průtok na přibližně normální úroveň. Vytékající proud je stále laminární, i když se může vzhled vody změnit, jako kdyby se proud snažil rozdělit na dvě části nebo možná do spirály. Teď pusťte vodu úplně naplno.

Hladké laminární proudění se rozbije, voda naráží na umyvadlo velikou silou a tok je zpěněný a zase nepravidelný. Je to *turbulentní* proudění a máme zde druhý důležitý přechod: z laminárního proudění na turbulentní.

Zavřete kohoutek, vytřete podlahu, pokus je ukončen. Teď je na řadě matematika.

Nahromaděné chvění

Viděli jsme dvě verze přechodu k turbulenci. Při prvním se mění rytmus kapek a fakticky máme diskrétní dynamický systém (za předpokladu, že zanedbáme detailní strukturu jednotlivých kapek). V druhém případě, kdy se laminární proud mění na turbulentní, se jedná o spojitý systém. V obou případech se z pravidelného chování najednou stane nepravidelné.

Turbulence hrají nesmírně důležitou roli v mnoha odvětvích vědy od astronomie po meteorologii (obrázek 69). Jsou také důležité pro inženýrskou praxi. Turbulence může zničit vodovodní trubku nebo ropovod, zlomit lodní šroub a způsobit pád letadla. Inženýři vyvinuli různé metody založené na zkušenostech i na promyšlených statistikách, jak se s turbulentemi vypořádat v praxi. Ale pravá vnitřní podstata turbulence představuje problém vyššího řádu.

Základní výzkum tohoto druhu je spíš úlohou pro fyziky než pro inženýry.

Co si s turbulencemi počne matematická fyzika klasické školy?

Klasickou rovnici proudění viskózních tekutin z Eulerovy rovnice odvodili Francouz Claude Navier a George Stokes z Irska. Proudění tekutin podle Navierovy-Stokesovy parciální diferenciální rovnice je deterministické a předvídatelné. Před nástupem chaosu se to považovalo za synonymum pro „pravidelné“. Ale turbulence je nepravidelná. Závěr: s rovnicí je něco špatně.

To je klidně možné. Rovnice přece popisují vysoce idealizovanou tekutinu, která je nekonečně dělitelná a homogenní. Ale reálná tekutina se skládá z atomů. (Svou oblíbenou úroveň podrobnosti od droboučkových pevných kuliček po kvantové víry pravděpodobnosti si mezi navzájem soupeřícími teorie mi vyberte sami.) Zdá se, že v turbulenci se vyskytují nepatrnější a nepatrnější víry. Ale vír velikosti menší než atom je fyzikální nesmysl. Pokud by skutečná tekutina měla dodržovat Navierovu-Stokesovu rovnici tak detailně, musela by své vlastní atomy roztrhat.

Turbulence by se tedy možná dala vysvětlit jako makroskopický projev atomové struktury. Nepřesnosti atomové dimenze v Navierových-Stokesových rovnicích se fyzikálním tokem rozmnoží, narostou na velikosti a dají se pozorovat jako turbulence. To byla Lerayova teorie z roku 1934, tedy z doby, kdy byla atomová teorie obzvlášť novátorská a módní.

O deset let později si matematický fyzik Lev Landau uvědomil, že existuje ještě jiná možnost. Článek, který sepsal v roce 1944, začíná: „Přestože se o turbulentním chování rozsáhle pojednává v literatuře, pravá podstata tohoto jevu stále postrádá dostatečné objasnění.“ Dále Landau vystihl klíčovou otázku: *odkud se turbulence bere?* „Dle autorova názoru se problém může začít jevit v jinném světle, až bude důkladně prozkoumán proces inicializace turbulence.“

Představte si systém usazený v stabilním stavu. Někdy, třeba když se vhodně změní vnější vlivy, může tento stav přestat být stabilní. Například objekt, který stabilně leží na stole, může sklouznout, když stůl nakloníme, nebo balón může prasknout, když ho příliš nahustíme.

Když si nechávám vyměnit pneumatiky na autě, automechanik kolo nasadí na úžasný stroj, který s kolem točí dokola. Podle čísel, která se objevují na displeji, natluče mechanik do ráfku závažíčka, aby kolo vyvážil. Důvodem pro tohle kouzlení je, že nevyvážené kolo se začne při příliš vysokých otáčkách chvět.

V dynamice je matematika chvění fundamentální. Jeden z nejzákladnějších způsobů, jak může stav ztratit stabilitu, je právě kvůli chvění.

Když doposud stabilní stav přejde do chvění, je k jeho stávajícímu pohybu přidán nový periodický pohyb. Kolo, které se hladce otáčelo, začne vibrovat, takže se tu skládají dva periodické pohyby: rotace a vibrace.

Landau vznik turbulence považoval za nahromaděné chvění. Vyslovil teorii, že z počátku je turbulence složením tří nebo čtyř různých periodických pohybů, a když se plně rozvine, počet periodických pohybů začne být nekonečný. Základním mechanismem vzniku chvění je takzvaná *Hopfova bifurkace* pojmenovaná po Eberhardu Hopfovi. Stok (klidový stav) začne být nestabilní

a promění se ve zdroj obklopený limitním cyklem reprezentujícím periodický pohyb (obrázek 70). V roce 1948 Hopf navrhl poněkud podrobnější teorii

ve stejném duchu jako Landau. Nedlouho předtím studoval holandský vědec Johannes Martinus Burgers zjednodušenou verzi Navierových-Stokesových rovnic a Hopf si osvojil podobnou taktiku. Přišel s dalším přibližným modelem, který se zcela výjimečně dal vyřešit explicitně, a ukázal, že postupuje podle Landauova scénáře akumulace chvění.

Hopfova-Landauova teorie byla během dalších tří desetiletí obecně přijímána a používána. Měla několik kladů. Byla jednoduchá a srozumitelná.

Mechanismus, kterým se k pohybu přidávala další frekvence, byl základní a přirozený. Existovaly modelové rovnice, jako ta Hopfova, ve kterých se tento scénář prokazatelně vyskytoval. A fungovaly pro ni klasické techniky jako třeba Fourierova analýza, takže se s ní daly provádět výpočty.

Nepravděpodobný scénář

Ale v roce 1970 byl tento úhledný obrázek narušen. Nebyl roztříštěn, protože pochybnosti přišly z oblasti mimo dynamiku tekutin, byly vysoce spekulativní a postrádaly jakoukoli podporu experimentu. A co horšího, nebyly odvozeny z fyziky proudění tekutin, ale z topologie.

Belgický matematik David Ruelle, který pracoval na Institutu des Hautes Études Scientifiques v Paříži, a hostující Floris Takens z Holandska začali o turbulentích uvažovat z pohledu topologické dynamiky a`la Smale. Je pro vznik turbulence nějaký *typický* scénář, generický proces?

To není tak jasné. Ale když začneme takhle přemýšlet, tak *je* jasné, že Hopfova-Landauova teorie *prostě nemůže být správně*. Protože i když každé z hromady ných chvění může z matematického i z fyzikálního hlediska vypadat přijatelně, tak není. Jenom to první.

Intuice Hopfovi a Landauovi napovídala vyjít do jisté míry z hamiltonovské dynamiky. Tam zachování energie předepisuje omezení, díky nimž jsou mnohafrekvenční kvaziperiodická chování běžným jevem. Toto omezení se ovšem nevztahuje na nekonzervativní systémy – systémy s třením. A v toku viskózní tekutiny je tření spousta.

Ruelle a Takens dospěli k následujícímu obrázku.

První přechod z klidového stavu na jediné chvění je typický i pro nekonzervativní systémy: vzniká periodické chování. Tady žádné úskalí není.

Druhý přechod, přidání další frekvence, určitě může nastat. Zpočátku vede k pohybu, který je z topologického hlediska tok na dvojdimenzionálním toru a vypadá jako kvaziperiodické složení dvou nezávislých periodických pohybů. Ale takový nezůstane, protože takový pohyb není typický, není generický.

V praxi jej rozbije sebemenší narušení.

V té době už existovala klasifikace všech typických generických strukturálně stabilních toků na toru a vyplýval z ní jev dobře známý elektroinženýrům, který se jmenuje *fázový závěs* (obrázek 71). Dva původně nezávislé pohyby se začnou vzájemně ovlivňovat a být provázané, až vznikne složený periodický pohyb s jedinou, složenou periodou.

Při skládání tří frekvencí se to pokazí ještě mnohem dramatičtěji. Tři frekvence typicky v závěsu nejsou. Místo toho se mohou spojit a utvořit nový objekt, který Ruelle a Takens nazvali *podivný atraktor*. Solenoid je podivný atraktor a Lorenzův atraktor (jak se věří) také. Podivné atraktory mají podivné geometrie.

Základem Ruelleovy-Takensovy teorie je skutečnost, že Hopfův-Landauův scénář je z topologického hlediska asi stejně pravděpodobný jako špendlík balancující na špičce. Špendlík je nestabilní, Hopfova-Landauova teorie je *strukturálně* nestabilní. Když se pohne se špendlíkem, skácí se a spadne na stůl.

Když se rovnice pohybu nepatrně pozmění, Hopfův-Landauův scénář se rozpadne a zhroutí v podivný atraktor.

Falzifikace

Z Ruelleova a Takensova návrhu nebyli v dynamice tekutin nadšení zdaleka všichni. Vlastně byl docela kontroverzní. Ale pár lidí – jak se ukázalo, tak dost – se jím nechalo inspirovat a postoupilo do další fáze. *Je to pěkné, ale je to správně?*

Je jeden prastarý způsob, jak ve vědě zjistit, jestli teorie platí.

Pokus.

Přesněji řečeno z pokusu lze poznat, že teorie *neplatí*, protože správnost teorie není stoprocentně jistá nikdy. Matematická věta se dokázat dá, ale teorie se dokázat nedá. Jak zdůrazňoval filozof Karl Popper, ověřování vědecké teorie není záležitost *verifikace*, ale *falzifikace*. Čím déle odolává vědecká teorie pokusům o falzifikaci experimentem, tím pravděpodobnější je, že platí.

Nebo aspoň tím širší je pásmo podmínek, za kterých správná je. Ale nikdy si nemůžeme být jistí absolutní platností teorie, i kdyby experimentálních testů přestála milion, protože – kdo ví? – může selhat při milion prvním.

Jak se tedy přibližuje třetí tisíciletí, vědci upouštějí od honby za Pravdou. Přitom se samozřejmě velice snaží nedělat chyby. Ale už nežijeme v éře absolutna. Učíme se, i když strašlivě pomalu, nebrat se příliš vážně. Aby byla teorie považována za vědeckou, musí být v principu falzifikovatelná. Na ostrově Korfu mají pověru, že spatřit kudlanku nosí buď štěstí, anebo smůlu podle toho, co se potom stane. Toto přesvědčení se mezi vědecké teorie nepočítá, ale ne proto, že se nedá měřit „štěstí“, ale proto, že není moc jasné, jak by experiment mohl teorii vyvrátit, i kdyby štěstí měřit šlo. To vůbec neznamená, že obyvatelé Korfu *nemají pravdu*. Probíráme zde omezení na vědecké znalosti. Na světě mohou být pravdivé věci, které nemohou být známy ve vědeckém smyslu. Rozřešit debaty, které se o nich vedou, půjde ovšem těžko.

Laboratorní klasika

Je teorie podivných atraktorů falzifikovatelná?

Rozhodně nebyla falzifikovatelná přímo tak, jak byla původně vyslovena. Nemůžeme jít a v přírodě hledat podivné atraktory, takže ani nemůžeme žádný najít. Matematický popis takového atraktoru v Ruelleově-Takensově teorii totiž nijak nesouvisí s žádnou fyzikálně měřitelnou veličinou. Takže z hlediska falzifikovatelnosti to nevypadá o moc lépe než teorie, která tvrdí, že turbulence je dílem neviditelných příšer plovoucích tekutinou, příšer, které se žádným fyzikálním aparátem nedají zachytit.

Můžeme to obejít několika způsoby. Jedním je zlepšit kontakt mezi matematikou a fyzikou. To v případě turbulence vypadalo velmi těžko proveditelné – což *neznamená*, že to není důležité. Dalším je udělat krok stranou. Možná bychom mohli podivné atraktory přimět, aby se projevíly nepřímo.

Hopfova-Landauova teorie je zjevně falzifikovatelná mnohem lépe. Stačí změnit frekvence jednotlivých složek pohybu a sledovat, zda se chvění vrší předepsaným způsobem. Pokud ne, Hopfova-Landauova teorie to má spočítané.

Takže místo, abychom se snažili o důkaz, že Ruelle a Takens mají pravdu, můžeme zkoušet ukázat, že Hopf a Landau pravdu nemají. Historicky to ale přesně takhle neproběhlo. Místo toho se experimentátoři pustili do dokazování, že Hopf a Landau pravdu *mají*.

Ale to už, mohli byste si myslet, měli fyzici určitě za sebou. Konec konců, Hopfova-Landauova teorie byla obecně přijímána po několik desetiletí. Ne tak docela. Existovala pozorování prvních několika fází, ale jak se chvění vršila, bylo stále těžší změřit je dostatečně přesně.

K dalšímu pokroku byl potřeba nový nápad.

Harry Swinney, fyzik z Texaské univerzity v Austinu, zahájil svou kariéru experimentátora prací na fázových přechodech. Když se voda vaří, kov taví nebo magnet magnetizuje, jedná se o fázový přechod: makroskopickou změnu stavu založenou na reorganizaci na molekulární úrovni. V jistém smyslu je přechod do turbulence také jakýmsi fázovým přechodem v tekutině. Někteří významní odborníci na dynamiku tekutin, jako například Osborne Reyolds nebo lord Rayleigh, o nich dokonce takto uvažovali. Ale analogie vypadala příliš volná, příliš nepřesná na to, aby mohla být použitelná matematicky.

Nicméně Swinneyho to přimělo k zamyšlení. Daly by se metody používané na výzkum choulostivých jevů při fázových přechodech aplikovat na tekutiny? Je mnoho způsobů, jak tekutina začíná být turbulentní. Při navrhování pokusu musíme ze všeho nejdřív vybrat vhodný systém. Základní výzkum není zaměřen na specifické cíle, jako například „zjistit nejlepší tvar křídle pro tryskáč“, takže si může dovolit přepych výběru systému, se kterým bude pracovat. Pro laboratorní pokusy ve vědě je důležité, aby byl systém „čistý“. Nemám na mysli, že by neměl být upatlaný, ale měl by být snadno sestavitelný a spustitelný, měly by z něj být přesné výsledky a při opakovaném spuštění by měl dělat totéž.

V dynamice tekutin je jeden klasický laboratorní systém, který původně sestavil

francouzský hydrodynamik Maurice Couette. Chtěl zkoumat „smykové toky“, ve kterých je tekutina roztrhaná, a vymyslel soustavu dvou válců, jeden uvnitř druhého (obrázek 72). Když je vnější válec pevný a vnitřní rotuje, dochází k neměnnému a ovladatelnému smyku.

Člověk by čekal, že se voda bude točit spolu s vnitřním válcem, uprostřed rychle a na vnějším kraji pomalu. A to také Couette zjistil.

Anglický odborník na aplikovanou matematiku Geoffrey Ingram Taylor v roce 1923 pokusně zrychloval rotaci vnitřního válce a objevil něco záhadného. Při dost vysoké rychlosti se voda přestane točit pořád hladce dokola, ale rozdělí se do dvojic vírů, asi jako Besipky bez obalu. Opravdu se jedná o krásný příklad nestability Hopfova-Landauova typu, při které se vytvoří nový periodický pohyb. Ale to je jen první dějství Hopfova-Landauova scénáře. Experimentátoři i teoretici následně studovali Couetteův-Taylorův systém (nebo také Taylorův-Couetteův systém, jak jej nefrankofilové často nazývají) velice podrobně. Dost možná je to ten nejprostudovanější ze všech toků. Na šli náramně různorodé obrazce a formace. Víry mohou být zvlněné (obrázek 73). Vlny se mohou houpat nahoru a dolů jako koník na kolotoči, takže vznikají modulované zvlněné víry. Jsou tam zkroucené víry a opletené víry. Vyskytují se tam spirálovité útvary, zvlněné spirály, modulované zvlněné spirály a navzájem se prostupující spirály.

Při vysokých rychlostech systém začne být turbulentní.

Takové bohatství různých typů chování se dá vytvořit pomocí zařízení o velikosti a tvaru termosky a všechno se to dá přesně zopakovat. Takže se Swinney a jeho spolupracovník Jerry Gollub rozhodli provést svůj pokus na této laboratorní klasice.

Laserem osvětlení

Měření proudící tekutiny se tehdy obvykle prováděla pomocí vložených sond nebo vstříknutého praménku barviva. Tyto metody proudění ovlivňovaly a nebyly příliš citlivé ani přesné, ale lidé z oboru na takové problémy byli zvyklí a nic lepšího nečekali. Swinneymu ovšem padla do oka mnohem citlivější věc: laser.

Dnes jsou lasery běžné. Pokud máte CD přehrávač, máte laser. Jak ví každý fanoušek *Hvězdných válek*, laser je to, čím se likvidují císařské strážce. Lasery vydávají paprsek koherentního záření – světla, ve kterém jsou všechny vlny ve fázi a navzájem se neruší, ale posilují. Je to velmi přesná a ostrá baterka.

Až uslyšíte sirénu požárního auta, které pojede kolem vás, všimněte si, že když auto projede kolem, výška tónu se zdánlivě změní, siréna je najednou nižší. To je Dopplerův jev pojmenovaný po rakouském vědci Christianu Dopplerovi, který si ho všiml jako první v roce 1842. Když se hasiči blíží, jsou zvukové vlny vlastně urychlovány, kdežto když se vzdalují, jsou zpomalovány. Stejný jev funguje i se světlem, jen se zde při změnách frekvence mění barva. Když laserem posvítíme na hasičské auto a porovnáme barvu odraženého světla s původním, můžeme určit, jak rychle hasiči jedou.

Víc k věci: když do tekutiny vmísíme nepatrné šupinky hliníkového prášku, můžeme laser použít na zjištění, jak rychle se šupinky – a patrně také tekutina – pohybují. Této technice se říká dopplerovský laserový rychloměr.

Komplikovaný signál, který je směsicí různých frekvencí, potom lze matematicky analyzovat a rozdělit na jednotlivé složky. Můžeme také zjistit, jak silné jednotlivé komponenty jsou – jak moc přispívají k celku. Používá se v podstatě Fourierova analýza: vyjádření libovolné křivky jako součtu sinových a kosinových křivek.

Výsledek této analýzy se dá shrnout do *frekvenčního spektra* neboli grafu ukazujícího intenzitu jednotlivých složek frekvence (obrázek 74). Na obrázku je pět sad pozorování (levý graf) spolu s jejich frekvenčními spektry (vpravo). Dole jsou uvedeny doba pozorování (v sekundách, s) a frekvence (v hertzech, 1 Hz odpovídá jednomu kmitu za sekundu).

Obrázek vlevo nahoře například zobrazuje velice pravidelný rytmus s jed -

nou oscilací za zhruba deset sekund. V příslušném frekvenčním spektru vpravo je to zachyceno jako hrot označený f_2 poblíž 0,1 Hz. Druhá řada pozorování je mnohem méně pravidelná a v jejím spektru je hrotů několik. Pro trénované oko není těžké zjistit, že všechny vznikly posčítáním násobků dvou základních frekvencí f_1 a f_2 přibližně 0,03 Hz a 0,1 Hz.

Tyto hroty na frekvenčním spektru odpovídají přesně definovaným dílčím frekvencím, které jsou mnohem silnější než okolní frekvence. Kvaziperiodický signál má ve svém spektru hlavně ostré hroty jako na horních třech záznamech obrázku 74. Rušený signál má širokopásmové spektrum, jehož dílčí frekvence jsou setřené jako na posledním obrázku. Také je možná kombinace těchto dvou možností, jak je vidět na obrázku čtvrtém.

Frekvenční spektrum je něco jako „frekvenční otisky prstů“ řady pozorování a dá se z něj zjistit přítomnost jistých typů chování.

Z dat získaných pomocí svého laseru Swinney a Gollub na počítači zjistili frekvenční spektrum rychlosti tekutiny. To je přesně to, co je potřeba na zpozorování vzniku nových frekvencí, jak je předpověděli Hopf a Landau.

To aspoň čekali.

Hledali první přechod a našli jej. Pokus mnohokrát opakovali a dostali velmi přesná a jasná data. Tak jasná a tak přesná, až jim to odborníci na dynamiku tekutin nechtěli věřit. Jejich výsledky nechtěl nikdo publikovat a jejich žádost o grant byla zamítnuta. Někteří tvrdili, že výsledky nejsou nic nového, jiní jim nevěřili vůbec.

Nenechali se odradit a pokročili k hledání dalšího přechodu – a nenašli jej. Nebyl tam žádný jasný vznik nové frekvence. Namísto toho našli postupné vynořování širokého pásma frekvencí (obrázek 75). „Zjistili jsme, že to začne být chaotické.“

Kontakt

Věda je rozsáhlá. Není možné vědět o všem, co se děje. To, co lidé potřebují, se dozvídají díky osobnímu styku. Swinney a Gollub otestovali Hopfovu-Landauovu teorii – a shledali ji nevyhovující. Ale v té době nevěděli o tom, že Ru elle s Takensem navrhli alternativu.

Ale věděli o tom jiní a zprávy se začaly pomalu šířit. V roce 1974 se ve Swinneyho laboratoři objevil belgický matematik – David Ruelle. Ruelle měl teorii, která předpovídala chaos. Swinney měl chaos, ale bez teorie. Zbývalo zjistiť, zda to, co objevil Swinney, padne k tomu, co předpověděl Ruelle.

Nepřímo to naznačovala například skutečnost, že v přítomnosti podivných atraktorů se podle výpočtů dá očekávat širokopásmové spektrum.

Tou dobou se tempo bádání zrychlovalo. Existenci chaosu si uvědomovali další a další vědci a na jeho teoretických aspektech pracovali další a další ma te matici. Řada pokusů, které zprvu prováděl Swinney se svými spolupracovníky, ale brzy i další vědci, vypovídala velmi zřetelně, že se podivné atraktory vyskytují v celém spektru turbulentních toků.

Výsledky se daly aplikovat pouze na vznik turbulencí, ale přinejmenším v některých konkrétních laboratorních systémech teorie podivných atraktorů v turbulencích obstála a Hopfova-Landauova teorie neměla sebemenší šanci na úspěch. Ironií je, že o většině matematických podrobností od Ruelleho a Takense se ukázalo, že jsou nepodstatné, nebo dokonce chybné – ne po matematické stránce, ale v jejich interpretaci pro experiment. Ale hlavní myš - lenka... Tam to vypadalo, že narazili na zlato.

Nicméně pořád to nebylo jisté.

Mohlo být i jiné vysvětlení pro pozorované jevy. Bylo potřeba něco přímočařejšího, něco, co by hypotézu podivných atraktorů udělalo falzifikovatelnou pokusem.

A na to byl potřeba další nápad.

Falešné pozorovatelné

Ruelleův a Takensův článek z roku 1970 se nedá označit úplně za teorii turbulence, ale spíš za počátek takové teorie. Hlavním chybějícím prvkem bylo

pojítka mezi topologií a fyzikou. Pokud by například existovala nějaká hodnota, kterou bychom mohli změřit, zanést do grafu a ve výsledku vyhledat podivný atraktor, teorie by byla falzifikovatelná. Pokud bychom takový pokus provedli a podivný atraktor nenašli, zjistili bychom, že je teorie chybná. Co je pokusná pozorovatelná? To je veličina závislá na stavu systému, který se pozoruje. V topologické teorii turbulence chybí znalost toho, jak na sobě věci navzájem závisejí. Na první pohled je těžké najít způsob, jak to obejít, leda takové pojítka vybudovat. Jedním z možných výzkumných projektů, jak postavit Ruelleovu-Takensovou teorii na ověřitelné základy, tedy bylo: *odvodit podivný atraktor z Navierových-Stokesových rovnic* pro proudění tekutiny. To je problém, který vyžaduje pokrok spíš v matematické stránce věci než v experimentální, a zatím se jej nepodařilo uskutečnit. Lorenzův atraktor se nepočítá, protože se v něm používají aproximace.

Ale je ještě jeden způsob. Předpokládejme, že tvar atraktoru ze sady pozorování můžeme zrekonstruovat způsobem, který je *nezávislý* na tom, jakou veličinu přesně sledujeme. Potom na pojítka nezáleží.

Je to pěkný trik. David Ruelle a Norman Packard si mysleli, že by mohl fungovat, a Floris Takens našel způsob, jak to dokázat.

Z posloupnosti pokusných pozorování v její nejjednodušší formě získáme *časovou řadu*: seznam čísel vyjadřujících hodnotu pozorované veličiny v pravidelných časových intervalech. (Mohou být i nepravidelné, ale nekomplikujme tím náš výklad.) Časovou řadu tvoří například teplota na daném místě každý den v poledne, něco jako

17,3; 19,2; 16,7; 12,4; 18,3; 15,6; 11,1; 12,5; ...

ve stupních Celsia.

Předpokládejme, že taková data chceme dosadit na podivný atraktor. Problém je v tom, že očekáváme atraktor řekněme v třídimenzionálním prostoru, ale z pozorování dostáváme hodnotu jen jednu. Při měření rychlosti na základě Dopplerova jevu získáme jen frekvence odraženého světla – rychlost tekutiny v jednom konkrétním bodě, kde se laserové světlo odrazilo. Atraktor je tak stlačen do jediné dimenze. Je vidět, tak říkajíc, jeho silueta.

Kdybychom se na atraktor mohli podívat i z jiných směrů, mohl by jít sestavit úplný třídimenzionální obrázek, bezmála jako je architektovi tvar budovy jasný z půdorysu, nárysu a bokorysu. Na rekonstrukci třídimenzionálního atraktoru potřebujeme informace ze tří různých směrů.

Ale tyto další směry není možné najít v časové řadě jediné veličiny, nebo je? Jsou potřeba dvě další.

Ruelle si uvědomil, že se dvě další falešné pozorovatelné dají vytvořit z téže časové řady posunutím hodnoty času (obrázek 76). Místo jedné časové řady se porovnají tři takové, ta původní a dvě její kopie, posunuté o jedno a o dvě místa:

řada 1 17,3 19,2 16,7 12,4 18,3 15,6 11,1 12,5, ...

řada 2 19,2 16,7 12,4 18,3 15,6 11,1 12,5, ...

řada 3 16,7 12,4 18,3 15,6 11,1 12,5, ...

Tak dostaneme matematickou konfekci: časovou řadu třídimenzionálních pozorování vybudovanou z původní časové řady pozorování jednodimenzionálních.

Prostě se přečtou po sobě jdoucí sloupčky trojic. Prvním z těchto falešných pozorování je zde tedy trojice (17,3; 19,2; 16,7) vyjadřující bod ve třídimenzionálním prostoru, který leží 17,3 jednotek na východ, 19,2 jednotek na sever a 16,7 jednotek nahoru od zvoleného počátku. Další je (19,2; 16,7; 12,4) a tak dále. Jak plyne čas, pohybují se tyto trojice prostorem. Ruelle vyslovil hypotézu, že dráhy těchto trojic vytyčí přibližný tvar atraktoru (obrázek 77), a Takens tuto hypotézu dokázal. Packard byl mezi prvními, kdo tuto metodu použili při pokusu.

Pro atraktor ve více dimenzích je potřeba těchto posunutých časových řad

víc, ale funguje týž obecný postup. Je to výpočetní metoda, jak zrekonstruovat topologii atraktoru z jediné časové řady – a *nezáleží na tom, která veličina se použije*.

V praxi je potřeba uvážit i jiné věci, které souvisejí s efektivitou metody.

Některé veličiny jsou lepší než jiné a k teorii se přidávají všelijaká vylepšení.

Ale je to nápad, jak pěkně obejít potřebu nalézt v matematické teorii vůbec nějakou fyzikální proměnnou!

Podivná chemie

Chemické reakce mohou oscilovat. Tento jev poprvé zdokumentoval William Bray v roce 1926 při rozkladu peroxidu vodíku na vodu a kyslík za účasti jódového katalyzátoru. Ale chemici tehdy věřili (chybně), že zákony termodynamiky oscilace nedovolují. Místo aby Brayův objev rozpracovali, snažili se jej vysvětlit chybnou experimentální metodikou.

Tento přístup je zdržel asi o čtyřicet let. Ruský chemik Boris Bělousov vypožoroval periodické oscilace barvy ve směsi kyseliny citrónové, kyseliny sírové, bromidu draselného a soli ceru v roce 1958. V té době už Ilya Prigogine dokázal, že v oblastech vzdálených od termodynamické rovnováhy obvyklé termodynamické zákony neplatí, a tak byli lidé lépe připraveni brát výsledek

vážně. V roce 1963 Anatolij Žabotinskij upravil Bělousovův recept, místo ceru použil soli železa a docílil dramatické střídání barvy mezi červenou a modrou.

Ukázal, že pokud je chemická směs rozlita do tenké vrstvy, mohou se v ní tvořit kruhové a spirálovité vlny. Dnes je známo mnoho oscilujících chemických reakcí a běžné jsou i dynamické jevy složitější než periodicitu.

Jako vzorek práce z nedávné doby popíšu článek, který v roce 1983 vyšel Swinneymu a jeho spolupracovníkům J.-C. Rouxovi a Reubenu Simoyimu v časopisu *Physica*. Nezabývá se turbulencemi v tekutinách, ale chemickými turbulencemi – chemickým chaosem – v Bělousově-Žabotinského reakci.

Při pokusu měřili, jak se průběžně mění koncentrace iontů bromu. Data podrobili různým typům matematického rozboru, zjistili jejich frekvenční spektrum a z něj určili dílčí frekvence oscilací. Zrekonstruovali odpovídající dynamický atraktor (obrázek 78 nalevo) pomocí druhé „falešné“ časové řady. Typická geometrie podivného atraktoru je jasně patrná. Proměnné zanesli do grafu pokaždé, když pohyb přešel přes čárkovanou čáru vyznačenou v levé polovině obrázku 78, a dostali tak Poincarého zobrazení v pravé části obrázku. Body se drží poblíž jediné křivky, z čehož je vidět, že přestože je dy namíka chaotická, je vcelku jednoduchá a ne nepodobná logistickému zobrazení.

Výsledky jsou velice podrobné a v souladu se všemi matematickými skutečnostmi známými o podivných atraktorech. Obrázky jsou každopádně

velmi přesvědčivé. Klidně mohly vzniknout na terminálu počítačového grafika, který kreslí nějakou analogii Lorenzova atraktoru. Vlastně opravdu

blíže připomínají variantu Lorenzova atraktoru, kterou sestrojil v roce 1976 Otto Rössler (obrázek 79).

Chaos se v přírodě *vyskytuje*. Vlastně mi připadá úžasné, jak moc toho příroda asi o matematice chaosu ví. A dá se předpokládat, že to věděla dlouho předtím, než to zjistili matematici. Pojetí chaotické dynamiky nejenže funguje, ale funguje ještě mnohem lépe, než mohl kdo doufat. Velmi subtilní jevy předpovězené spojitým modelem tekutin – o němž víme, že na úrovni atomů musí

být *nesprávný* – přežijí aproximace prováděné při nahrazování moře atomů nekonečně dělitelným kontinuem. Mohli bychom to asi snadno pustit z hlavy

jako něco samozřejmého, ale obávám se, že to jsou jen plané naděje. *Rádi* by chom, aby to byla pravda – a, všem zkušenostem navzdory, to pravda je.

„*Co se může pokazit, to se pokazí.*“ Ale v tomto případě tohle slavné pravidlo neplatí. Skrývá se tu tajemství.

Ale není to tajemství, které bychom museli odhalit dřív, než ten úžasný zázrak, že to *funguje*, budeme moci nějak využít.

Ještě jednou Bašó

Tuto kapitulu jsem začal citátem Bašóa o poetickém zaujetí kapkami vody. Je příhodné skončit vyvoláním trochy jejich matematické krásy. Kapající kohoutek vyvolává obvykle spíš potřebu instalatéra než obdivné výkřiky, ale už jsme viděli, že na kapajícím kohoutku se dá vidět víc než voda tam, kde nemá být. Je to chaos v malém.

Chaotické kapání kohoutku je navíc diskrétní dynamický systém, který můžeme snadno pozorovat i analyzovat. Místo laseru stačí mikrofon.

Pojďme se na formování kapek podívat podrobněji.

Když vodu pustíme úplně maličko, kohoutek normálně kape v pravidel -
ném rytmu. Voda se pomalu hromadí u obroučky kohoutku do kapky, která se vydouvá a nafukuje, až už ji povrchové napětí proti působení gravitace nemůže udržet. Začne se po stranách stahovat, utvoří zužující se krček, načež se kapka oddělí a proces začne znovu od začátku. Jen stěží někoho překvapí, že kapky kapou opakovaně a rytmicky.

Když ale vodu pustíme o trochu víc, může se stát něco komplikovanějšího.

Když se kapka tvoří, zároveň také osciluje. Nedostane šanci usadit se do rovnoměrného, pomalu rostoucího stadia. Výsledkem je, že okamžik, kdy přesně se kapka oddělí, nezáleží jen na množství nahromaděné vody, ale také na tom, jak rychle se při svém kmitání pohybuje. Tehdy se kapky mohou tvořit v nepravidelných, neperiodických intervalech.

Je tu jasná analogie. Tekutina teče při malé rychlosti hladce, ale při vyšší rychlosti přejde k turbulencím. Při nízké rychlosti se kapky tvoří pravidelně, při vyšší začnou být nepravidelné. Mohl by oba jevy ovládat stejný matematický mechanismus?

Nemusel by. Možná, že když tok začne být nepravidelný, je to kvůli tomu, že náhodné vlivy jako například vzdušné proudy mají vliv na formování kapek.

I na to má Bašó příklad:

Večer, když vítr vál,
s větvemi stromu bašó si hrál.
Děšť, co do mísy propadal,
já jsem poslouchal.

(Strom bašó je druh banánovníku a básník měl jeden takový strom, který rostl před jeho domem, natolik rád, že si jej zvolil za své umělecké jméno.) Tentokrát je za jakoukoli nepravidelnost zodpovědný náhodný pohyb listů, nikoliv jemná dynamika tvorby jediné kapky.

Deterministický chaos? Náhodnost?

Robert Shaw, Packard a jejich kolegové z University of California v Santa Cruz to ověřili pokusem. Nechali kohoutek kapat na mikrofon. Signál z mi kro fonu nahráli, aby každá padající kapka vytvořila dobře definované cvaknutí.

Cvaknutí potlačí většinu podrobností o dynamice. Neukazují, jak kapka narůstá, jen okamžik, kdy se oddělí. Jsou jako seriál diskrétních snímků dynamiky.

Tvoří vlastně něco dost podobného Poincarého zobrazení, což je také seriál snímků. Z matematického hlediska se s nimi dá zacházet stejně.

Na odvození dynamiky museli matematici ze Santa Cruz experimentální data zpracovat. Změřili časové intervaly mezi jednotlivými cvaknutími a do -
sta li tak časovou řadu intervalů o zhruba 5000 členech. Potom, jak je popsáno výše, použili Takensovu metodu rekonstrukce. Posunutím původní časové řady o jedno a o dvě místa vytvořili dvě další, „falešné“ časové řady a za pomoci počítače nakreslili výsledných 5000 trojic.

Tak byli schopni zrekonstruovat topologii atraktoru dynamiky kapajícího kohoutku (obrázek 80). Jak oznámili ve vydání *Scientific American* z prosince *Výsledkem experimentu byla vzrušující skutečnost, že v neperiodickém režimu kapajícího kohoutku byly skutečně odhaleny chaotické atraktory. Náhodnost kapek by také mohla být způsobena vlivy, které jsme nezaregistrovali, jako například malými vibracemi a vzdušnými proudy, ale v tom případě by mezi po sobě jdoucími intervaly nebyl žádný zvláštní vztah a zakres dat by tvořil pouze beztvárovou skvrnu. Skutečnost, že se nějaká struktura v zakresu pozorovat dá, znamená, že náhodnost má deterministický podklad. Mnohé z datových souborů*

vykazují podkovovitý tvar, který je charakteristický pro jednoduchý proces natahování a skládání.

Zodpovědnost opravdu nese podivný atraktor. Data připomínají atraktor podobný Hénonovu.

Při vyšším průtoku začne být experimentální atraktor velmi komplikovaný a jeho struktura stále není pochopena. Není známa ani žádná přímá souvislost mezi tímto empirickým modelem a fyzikou utváření kapek. Ještě zbývá spousta práce.

Čůrek z kohoutku je jen jedním z druhů turbulence, a to spíš speciálním, ale chaos byl dále objeven v mnoha dalších turbulentních tocích. V roce 1989 se Tom Mullin z Oxfordské univerzity dostal na titulní stránku časopisu *Nature* s krásným experimentem, při němž pozoroval podivný atraktor v turbulentním Taylorově-Couetteově proudění. Při tomto konkrétním pokusu byl použit krátký válec a pro docílení silného rotačního urychlení toku se koncové destičky nechaly rotovat spolu s vnitřním válcem. Aparaturu bylo třeba udržovat v konstantní teplotě a v prostředí bez vibrací, jinak by byl jemný podpis chaosu setřen. Nalezení chaosu není snadné. Už teoretická počítačová analýza, kterou Mullin provedl ve spolupráci s Andrewem Cliffem v AERE Harwell pomocí numerického softwaru ENTWIFE, naznačovala vysokou pravděpodobnost, že tento systém bude generovat chaos. Experimentální data byla zrekonstruována Ruelleovou-Takensovou metodou a vyskočil pěkně úhledný podivný atraktor. Byl to dokonce jeden z těch, které matematici už znali: vyskytl se už dříve v jistých rovnicích, které odvodil Bill Langford z Guelphu v souvislosti s takzvanou Silnikovovou bifurkací, což je standardní trasa k chaosu. Takže při této příležitosti experimentální rekonstrukce chaotického atraktoru vedla k novým informacím o matematických vlastnostech proudění tekutin, a dokonce i nabídla vodítka ke zjištění, co chaos způsobuje. Skutečnost, že chaotická dynamika podivných atraktorů je zodpovědná za alespoň *některé* turbulentní jevy, je tedy pevně ustanovena, ale spousta věcí týkajících se turbulence zůstává záhadou. Plně rozvinutá turbulence, pokud se jí podivné atraktory vůbec týkají, může vyžadovat atraktor enormní dimenze – tisíc, milion. O takových se v současnosti nedá říci nic, co by stálo za to vědět. Mnohé turbulentní jevy zřejmě vznikají kvůli rozhraním – například stěnám trubek – a teorii podivných atraktorů se zatím nepodařilo s vlivem rozhraní propojit.

A neměli bychom být posedlí chaosem jako jediným možným vysvětlením.

Ruský fyzik V. P. Maslov nedávno objevil důkaz jistého druhu nejednoznačnosti v Navierových-Stokesových rovnicích. Rovnice ve skutečnosti nemusejí určit tok do všech detailů: pro dané počáteční podmínky mohou mít víc řešení, přinejmenším v jistém přibližném smyslu. Maslov říká, že efekt „se dá popsat obrazně. V Puškinově slavné pohádce *Pohádka o popovi a jeho dělníku Baldovi* Balda provazem zamíchá vodu a vzbudí demony. Když tedy točí provazem dost rychle, démoni začnou nedeterministicky běsnit a zapříčiní turbulence.“

Možná že teorie s neviditelnými příšerami nakonec není zas až tak hloupá.