Kapitola 6

Dvě strany jedné mince

Němec Bernhard Riemann (1826–1866) byl vzorem matematické přesnosti, zatímco Ind Srinivasa Ramanujan (1887–1920) byl příkladem čistě intuitivního matematika. Oba studovali prvočísla a zaznamenali úspěchy i porážky. Každopádně jejich životy a práce mimořádně dobře ilustrují dva různé typy matematické osobnosti.

Bernhard Riemann

Riemann byl jako bubeník, který udává rytmus, podle něhož jeho publikum – prvočísla – tančí. Byl to ale velice složitý rytmus. Vědecké objevy, a zvláště ty matematické, významně závisejí na území, které je zkoumáno, a na vědomostech do té doby získaných. Objevitel je jakýmsi horským průvodcem. Když se mezi čísly procházíte, je důležité, abyste dokázali zachovat správný směr, když ale po nich stoupáte vzhůru, je to docela jiná záležitost. To jsou túry mnohem namáhavější a musíte postupovat pomaleji, abyste se předčasně nevysílili. Stejně ale brzy dojdete do výšky, kdy už musíte mít jistou horolezeckou průpravu a řádné vybavení, abyste mohli pokračovat výš. Vylézt do 4 000 metrů je něco úplně jiného než vystoupat do 2 000 metrů. S Riemannem jsme docela jistě v kategorii horolezců „4 000 metrů a výše“.

Georg Friedrich Bernhard Riemann se narodil v Breselenzi v Hannoverském království. Zřejmě kvůli mimořádné plachosti a téměř patologickému strachu z vystupování na veřejnosti nenásledoval kariéru svého otce, který byl protestantským pastorem. Friedrich Constantin Schmalfuss, ředitel školy, kam mladý Riemann chodil, půjčil chlapci ze své vlastní knihovny mimořádně pokročilou matematickou knihu, Legendreovu *Teorii čísel*. Riemann ji během jednoho týdne celou přečetl, a když ji vracel, poznamenal, že to bylo zajímavé čtení. Uplynulo několik let a Riemann vytvořil vlastní teorii prvočísel, v níž využil znalosti získané z Legendreovy knihy a vytvořil jednu z nejslavnějších hypotéz v dějinách matematiky.

V 19 letech navštěvoval Riemann matematické přednášky Moritze Sterna na göttingenské univerzitě. Tam se poprvé setkal s Gaussovými pracemi. O rok později začal studovat matematiku na berlínské univerzitě, kde mezi jeho vyučujícími byli Peter Gustav Lejeune Dirichlet, Carl Jacobi, Jakob Steiner a Ferdinand Eisenstein. Jeho úzká spolupráce s posledně jmenovaným vedla k jedné z nejdůležitějších matematických teorií 19. století, k teorii funkcí komplexní proměnné. Ta se stala Riemannovou základní zbraní k vytvoření hypotéz o prvočíslech.

Bernhard Riemann.

HABILITAČNÍ PRÁCE

„Myslím, že díky své disertaci mám teď lepší možnosti. Doufám též, že se naučím psát rychleji a plynuleji, zvláště když se budu častěji vyskytovat ve společnosti a budu mít možnost přednášet; proto jsem dobré mysli," napsal Riemann v dopisu otci. Mluvil o obhajobě doktorské práce na göttingenské univerzitě, bylo mu 25 let. Název práce zněl *Základy obecné teorie komplexních funkcí komplexní proměnné.* Práce byla nadšeně hodnocena Gaussem, jednou z žijících matematických legend té doby.

Zeta funkce

Jak jsme viděli ve 3. kapitole, Euler definoval funkci

$$\zeta(x) = \frac{1}{1^x} + \frac{1}{2^x} + \frac{1}{3^x} + \frac{1}{4^x} + \ldots + \frac{1}{n^x} + \ldots = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n^x},$$

která pro $x = 1$ přechází v harmonickou řadu. Švýcarský matematik už věděl, že pro $x \leqq 1$ řada diverguje. Podařilo se mu ji sečíst pro $x = 2$ a $x = 4$:

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}, \quad \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}.$$

Také už víme, jak Euler nalezl vztah mezi zeta funkcí a prvočísly (v podobě takzvaného Eulerova součinu). Tento vztah jemu a dalším matematikům pomohl dokázat, že prvočísel je nekonečně mnoho, což už ovšem dávno a jednodušeji dokázal Eukleides.

Dále zde byla Gaussova hypotéza, že pro velká x platí

$$\pi(x) \approx \frac{x}{\ln x},$$

kde $\pi(x)$ je počet prvočísel menších než x.

Riemann si předsevzal, že prostuduje Gaussovu hypotézu s pomocí Eulerovy zeta funkce, a usoudil, že nejslibnější technikou bude rozšířit tuto funkci do roviny komplexních čísel. Vymyslel k tomu metodu zvanou „analytické prodloužení" – přesně vzato analytickým prodloužením je v tomto případě takzvaná „Riemannova funkce zeta":

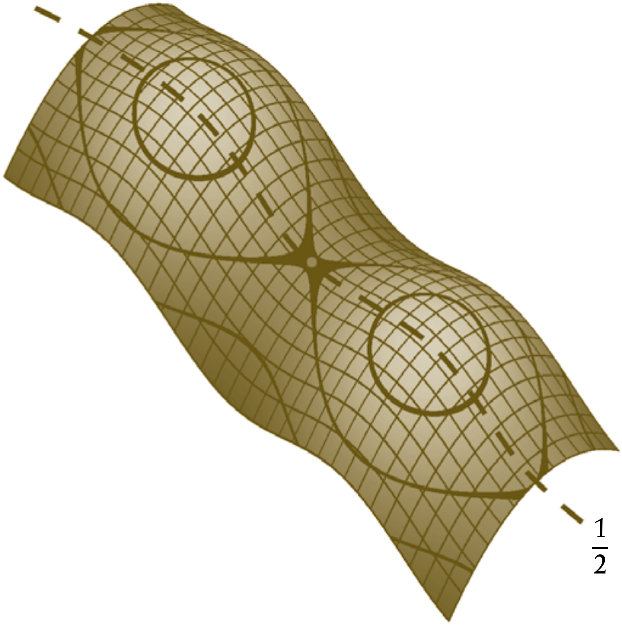
$$\zeta(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n^x} = \prod_p \frac{1}{1 - p^x}.$$

Nekonečný součin přes všechna prvočísla p na pravé straně rovnice vznikl úpravou Eulerova součinu a ukazuje na souvislost zeta funkce s prvočísly. Připomeňme, že tento součin vznikl přímým použitím Eukleidovy základní věty aritmetiky.

Už jsme viděli, jak Gauss zavedl reálné funkce komplexní proměnné a použil třírozměrný prostor, aby je zobrazil. Riemann postoupil ještě o krok dál, když zavedl komplexní funkce komplexní proměnné. Musel se přitom potýkat s problémem, že k zobrazení vyžadovaly čtyřrozměrný prostor, a tudíž je nelze zobrazit.

S použitím sofistikovaných technik podobných těm, o nichž jsme mluvili v předchozí kapitole, obdržel Riemann třírozměrný obraz rozložení nulových bodů zeta funkce v podobě krajiny plné kopců a údolí, které se střídají s jistou pravidelností.

Tato funkce má dva druhy „nulových bodů" (bodů, kde nabývá nulové hodnoty). Část z nich jsou záporná sudá celá čísla: $x = -2$, $x = -4$, $x = -6$, …, a těmto bodům se říká „triviální řešení". Nalézt ostatní nulové body už vůbec jednoduché není, naopak, je to extrémně obtížné. Je jich nekonečně mnoho a leží v takzvaném „kritickém pásu", což jsou body, jejichž reálná část leží mezi 0 a 1 (tedy $0 \leqq \mathrm{Re}\, x \leqq 1$). Je to oblast, která je intimně svázána s prvočísly. Právě pomocí vlastností zeta funkce dokázali Jacques Hadamard a Charles



de la Vallée Poussin nezávisle na sobě „prvočíselnou větu“, kterou zformuloval Gauss.

Neformálně a bez důkazu postuloval Riemann, že všechny netriviální nulové body funkce zeta mají tvar $\frac{1}{2} + iy$, jinými slovy že leží na přímce $x = \frac{1}{2}$. Toto tvrzení je obsahem takzvané Riemannovy hypotézy:

„Reálná část netriviálního nulového bodu zeta funkce je rovna $\frac{1}{2}$.“

Pokud je tato hypotéza správná, jsou prvočísla rozložena pravidelně – či spíše tak pravidelně, jak je to jen možné. Abychom si to přiblížili, použijeme analogii. Představme si funkci, která představuje rozklad zvukových vln, řadu sinusovek, z nichž se skládá třeba zvuk houslí. Pro jednoduchost předpokládejme, že hrají jen jedny housle. Zároveň s dobře zřetelnými maximy a minimy křivky jsou vidět i drobné nepravidelné odchylky, které narušují harmonický průběh grafu. V žargonu akustiky se jím říká „bílý šum“ a má různé příčiny: atmosférické poruchy, šum pozadí a podobně. Riemannova hypotéza říká, že nepravidelnost v rozdělení prvočísel je způsobena matematickým „bílým šumem“, což znamená, že rozložení prvočísel sleduje určitou zákonitost a není

ZKUSTE TO SAMI

Pokud byste se chtěli vzdělat v oboru funkcí komplexní proměnné, můžete sáhnout po jedné z mnoha vynikajících učebnic. Můžete pak zkusit dokázat Riemannovu hypotézu. Když se vám to podaří, Clayův matematický ústav vám vyplatí jeden milion dolarů, nezávisle na vašem věku, pohlaví a zaměstnání. Výplata se ovšem poněkud protáhne, protože nejdřív bude váš důkaz přezkoumán. V červnu 2004 ohlásil úspěch Louis de Branges de Bourcia, matematik z Purdueovy univerzity ve městě West Lafayette v Indianě, ale jeho důkaz byl posléze zamítnut. Totéž se stalo s důkazem, který předložil Li Sien-ťin v roce 2008.

Louis de Branges de Bourcia.

čistě náhodné. V tomto smyslu se Riemannovi podařilo vnést jistý řád do nesourodého světa prvočísel.

V roce 1914 dokázali britští matematici Godfrey Harold Hardy (1877 až 1947) a John Edensor Littlewood (1885–1977), že na této přímce leží nekonečně mnoho nulových bodů. Nedokázali tím sice Riemannovu hypotézu, ale posílili široce přijímané přesvědčení matematické obce, že Riemannova hypotéza platí. Do dnešního dne bylo na kritické přímce nalezeno asi deset milionů netriviálních nulových bodů.

Vynikajícího německého matematika Davida Hilberta se jednou dotázali, na kterou věc by se zeptal na matematickém sympoziu konaném 100 let po jeho smrti. „Zeptal bych se, jestli už byla dokázána Riemannova hypotéza," zněla odpověď. Dodneška nikdo s důkazem nepřišel, máme ovšem ještě čas, Hilbert zemřel až v roce 1943.