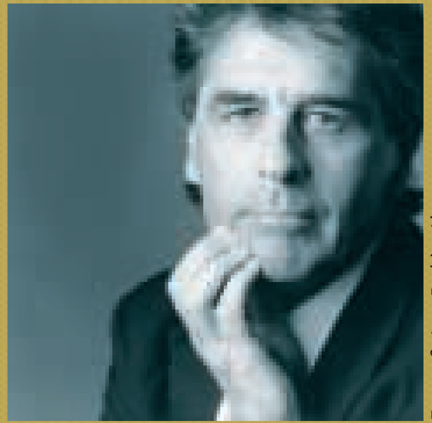


Fotografie Juan Rodrigo Llaguno

Keith Devlin je profesorem na katedře matematiky Stanfordské univerzity a ředitelem Centra pro studium jazyka a informace. Kromě desítek odborných publikací je i autorem řady populárně naučných knih o matematice (např. *The Math Gene, The Science of Patterns, The New Golden Age, Life by the Numbers, InfoSense, Goodbye, Descartes* a další).

- **Matematika nám dává oči, kterými můžeme spatřit to, co by našemu zraku zůstalo jinak skryto. V tomto smyslu lze říci, že matematika je způsob, jak zviditelnit neviditelné.**
- **Krásný obraz, hudební skladba i román musí být překvapující i samozřejmý, harmonický i šokující, všezahrnující i rafinovaně jednoduchý. Taková musí být i každá matematická teorie.**

Co je to matematika? Obvyklá odpověď, kterou uslyšíme, bude: „*Matematika* – to jsou počty.“ Možná se nám dostane upřesnění, že jde o vědu *o* číslech. Ale takto chápaný popis matematiky přestal platit již před 2 500 lety! Pro starověké Řeky, kteří kladli důraz na geometrii, byla již matematika naukou o číslech a *tvarech*. Newton a Leibniz zase přetvořili matematiku ve studium čísel, tvarů, ale také *pohybu, změny* a *prostoru*. Koncem 19. století se matematika stala i naukou o *matematických postupech*, které jsou při studiu těchto pojmů používány. Bouřlivý rozvoj matematiky ve 20. století pak přinesl novou definici matematiky jako vědy *o strukturách*. Matematik zkoumá abstraktní numerické struktury, struktury tvarů, zákony pohybu, principy chování a rozhodování, podstatu pravděpodobnosti atd. Všechny struktury mohou být reálné nebo uměle sestavené, zjevné nebo skryté, statické nebo dynamické, kvalitativní nebo kvantitativní, ryze účelové nebo vymyšlené jen tak pro zábavu. Jejich podstata vychází ze světa, který nás obklopuje, z hlubin prostoru a času i z labyrintu lidské mysli. Toto pojetí srozumitelně a přehledně zpřístupňuje Keith Devlin a klade při tom důraz i na mnohdy opomíjenou stránku matematiky, totiž na její estetickou působivost.

Zpočátku jsem propadal depresím, že kniha o pouhých 350 stranách obsahuje vše podstatné, co jsem se naučil za dlouhá léta studia matematiky. Teprve pak jsem si uvědomil, že to svědčí jen o Devlinově mistrovství.

Adam Rutkowski, Sydney

ISBN 80-86569-09-8 (Dokořán)
ISBN 80-7203-470-7 (Argo)

Doporučená cena 350 Kč

edice aliter

Jazyk matematiky

Keith Devlin

DOKOŘÁN

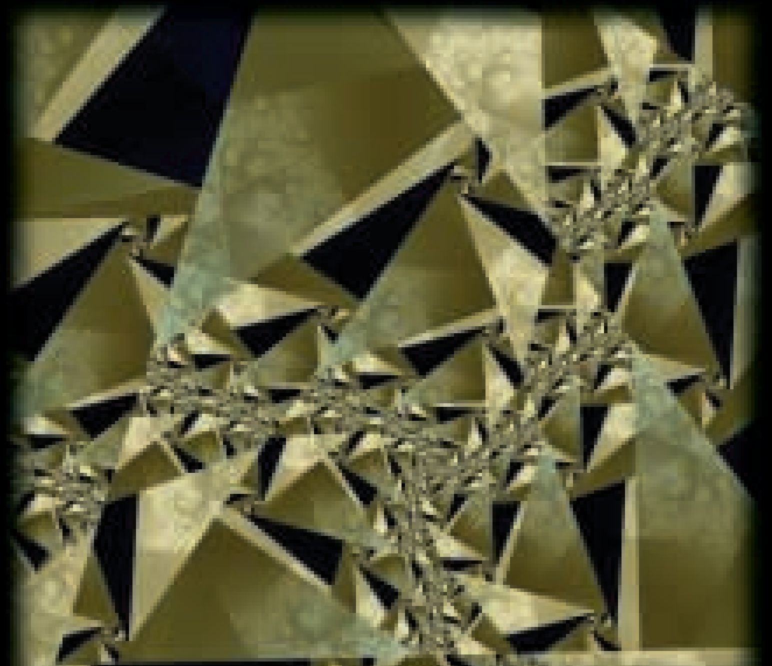
ARGO

edice aliter

Keith **Devlin**

Jazyk matematiky

Jak zviditelnit neviditelné



DOKOŘÁN ARGO

„Velkou knihu přírody mohou číst jen ti,“ řekl kdysi Galileo Galilei, „kteří rozumějí jazyku, jímž byla napsána. A tímto jazykem je matematika.“

Matematika bývá označována za „královnu věd“, současně však – podobně jako zimní královna z Andersenovy pohádky – vzbuzuje spíše strach než úctu a lásku. Podle význačného matematika Keitha Devlina ze Stanfordské univerzity rozhodně neprávem. Již od antiky není matematika jen „vědou o číslech“, ale mnohem více způsobem myšlení a vnímání, který nám umožňuje pronikat ke kořenům světa kolem nás, ať už se na ně díváme pohledem biologa, fyzika nebo ekonoma. Z tohoto širšího hlediska zkoumá autor několik nejzajímavějších oborů lidské činnosti, pro něž matematický způsob myšlení znamenal zásadní přínos: od hudby, výtvarného umění a jazykovědy až po astrofyziku či třeba pojišťovnictví nebo hazardní hry.

Devlinova kniha podává přehledný obraz současné matematiky a jejího historického vývoje, zároveň však vyzdvihuje její základní rysy, jimiž je jednoduchost, čistota, přesnost a elegance.

edice aliter

DOKOŘÁN ARGO

edice aliter

Keith **Devlin**

Jazyk matematiky

Jak zviditelnit neviditelné

Přeložil Jan Švábenický

Nakladatelství Argo a Dokořán
Praha 2002

Z anglického originálu The Language of Mathematics přeložil Jan Švábenický.
Odborná lektorace a konzultace k terminologii Luboš Pick a Alexandr Rosen.

Za laskavé svolení s uveřejněním vybraných ilustrací děkujeme Jerrymu Berndtovi, Musée du Louvre a nakladatelství W. H. Freeman.

First published in United States by W. H. FREEMAN AND COMPANY,
New York and Basingstoke

Poprvé vydáno v USA nakladatelstvím W. H. FREEMAN AND COMPANY,
New York a Basingstoke

ISBN 80–86569–09–8 (Dokořán)
ISBN 80–7203–470–7 (Argo)

Obsah

Předmluva

Tato kniha se pokouší přiblížit vám – zvídavým čtenářům – podstatu matematiky v jejím historickém vývoji i v celé současné šíři. Konkrétní návody, jak něco vypočítat, v ní však nenaleznete. Je to kniha, která se snaží vylíčit matematiku jako bohatou a živou součást lidské kultury. Je určena běžnému čtenáři a nevyžaduje žádné zvláštní matematické znalosti ani schopnosti.

U jejího zrodu stála moje dřívější kniha *Mathematics: The Science of Patterns* (Matematika: věda o strukturách). Poté, co vyšla v nakladatelství W. H. Freeman v ediční řadě Scientific American Library, zaměřené na vědeckou literaturu, se stala jednou z jejích nejúspěšnějších odborných publikací. Při rozhovoru s mým tehdejším vydavatelem Jonathanem Cobbem jsme se domluvili, že původní text přepracuji tak, aby byl přístupný širší čtenářské veřejnosti. Nechtěli jsme, aby nová kniha měla honosnou úpravu a množství barevných obrázků a fotografií, které jsou pro řadu Scientific American Library tak typické.

Nakonec vznikla knížka, která vám poskytne vše podstatné, co bylo námětem původního vědeckého díla, ale přijatelnějším způsobem. Matematika se tak pro vás stane *příběhem o odhalování a studiu struktur*. Samozřejmě vám ukáži, co mám touto strukturou na mysli. Zřejmě jste již pochopili, že nehovořím o struktuře papíru ani tkaniny, třebaže i ty mohou mít zajímavé matematické vlastnosti.

Aby kniha lépe vyhovovala běžnému standardu populárně naučného díla, rozhodl jsem se většinu textů kompletně přepsat. Tím jsem také získal výbornou příležitost zařadit do knihy dvě doplňující kapitoly. Jednu o teorii pravděpodobnosti a druhou o zákonitostech reálného světa. Tyto kapitoly jsem chtěl začlenit i do původní knihy, ale ve formátu řady Scientific American Library pro ně nebyl dostatek místa.

I tentokrát mi pomáhali Fernando Gouvea, Doris Schattschneiderová a Kenneth Millett, kteří posuzovali původní rukopis pro řadu Scientific American Library. Ron Olowin poskytl spoustu komentářů k 8. kapitole, která je spolu se 7. kapitolou zcela nová. Redakční práci obstaraly Norma Rocheová a Susan Moranová, jež pracovala již na mé předešlé knize.

Když pohlédneme do minulosti, zjistíme, že téměř všichni věhlasní matematici byli muži. Tato skutečnost se odrážela mimo jiné i v tom, že odborná literatura postrádala jakýkoli ženský prvek. Tyto dny, kdy byla věda výhradně doménou mužů, jsou – jak doufám – již sečteny. S vědomím, že mou knihu uchopí nejedna něžná ruka, jsem se tomuto faktu snažil text alespoň místy přizpůsobit.

Úvod

Co je to matematika?

Nejsou to pouze čísla

Co je to matematika? Položíme-li tuto otázku náhodnému kolemjdoucímu, uslyšíme pravděpodobně následující odpověď: „Matematika – to jsou počty.“ Když ho budeme chtít trochu popíchnout, aby nám vysvětlil, jaké počty má na mysli, možná se nám dostane odpovědi, že jde o *vědu o číslech*. Dál bychom se asi nedostali. Ale takto chápaný popis matematiky přestal platit již před 2 500 lety!

Při této mylné představě není divu, že si málokdo dokáže uvědomit, že matematický výzkum je prosperující, celosvětově rozšířenou činností. Mnohdy si ani nepřipouštíme, jak hluboko matematika proniká do většiny oblastí každodenního života i celé současné společnosti.

Odpověď na otázku *Co je to matematika?* se v průběhu let několikrát změnila. Asi do roku 500 př. n. l. byla matematika skutečně *naukou o číslech*. Tato éra patřila matematikům starobylého Egypta a Babylonu, kteří si většinou vystačili s aritmetikou, již využívali k ryze praktickým účelům. Trochu se podobala dnešním kuchařkám: „Vezmi trojku, přidej k ní pětku a dostaneš osmičku.“

Další období, přibližně 500–300 let př. n. l., patřilo učencům starověkého Řecka, které zajímala především geometrie. Na čísla pohlíželi jako na prostředek, s jehož pomocí se dá především změřit libovolná vzdálenost. Problém nastal, když měli určit například délku úhlopříčky čtverce jednotkové délky, což je iracionální číslo: $\sqrt{2}$. K vyjádření této míry již nevystačili se svými racionálními čísly (zlomky). Protože si jiná čísla nedovedli představit, rozvoj matematiky se v podstatě zastavil. Pro Řeky, kteří kladli důraz na geometrii, byla matematika *naukou o číslech a tvarech*.

Ve skutečnosti to byli právě Řekové, kteří přestali chápat matematiku jako pouhou sbírku návodů k měření, počítání a účtování a začali ji vnímat jako samostatnou oblast studia. Řekové nechtěli mít z matematiky jen prospěch, pohlíželi na ni jako na intelektuální hledání, jež obsahovalo estetické i náboženské prvky. Thales jako první vyslovil myšlenku, že přesně vyjádřené matematické tvrzení lze dokázat určitým metodickým postupem. Tato inovace stála u zrodu pojmu matematické věty, která je dodnes základním kamenem matematiky. Ve starověkém Řecku vyvrcholil tento přístup vydáním Eukleidových *Základů* (řec. Stoicheia, lat. Elementa), které jsou společně s *Biblí* nejvíce vydávanou a studovanou knihou všech dob.

Matematika v pohybu

Až do poloviny 17. století se matematika nijak výrazně nezměnila. Skutečného pokroku bylo dosaženo teprve tehdy, když Isaac Newton (v Anglii) a G. W. Leibniz (v Německu) zavedli nezávisle na sobě koncepci *diferenciálního a integrálního počtu*, která se zabývá zkoumáním pohybu a změny. Dřívější matematika se omezovala na statické formy počítání, měření a popisování tvarů. Díky postupům, které umožňují postihnout právě pohyb a změnu, jsme schopni studovat pohyb planety a pád tělesa, popsat principy mechaniky, proudění kapalin nebo rozpínání plynů, definovat fyzikální jevy jako elektřinu a magnetismus nebo také odhalit zákonitosti létání, růstu rostlin a živočichů, popsat průběh šíření epidemií nebo kolísání ekonomického zisku. Newton a Leibniz přetvořili matematiku ve studium čísel a tvarů, ale také *pohybu, změny a prostoru*.

Většina prvotních prací, které používaly diferenciální a integrální počet, byla zaměřena na studium fyziky. Skutečně, nejeden velký matematik té doby byl i významným fyzikem. Nicméně přibližně od poloviny 18. století vzrůstal zájem o matematiku jako vědu, nikoli pouze o její aplikace. A to vše v souvislosti s tím, jak se vědci snažili pochopit, z čeho pramení obrovská síla diferenciálního a integrálního počtu. V popředí zájmu opět stanula idea metodického důkazu starověkých Řeků, z níž vychází velká část naší současné čisté matematiky. Koncem 19. století se matematika stala naukou o číslech a tvarech, o pohybu, změně a prostoru, ale také o *matematických postupech*, které jsou při studiu těchto pojmů používány.

K dramatickému rozvoji matematiky došlo ve 20. století. Zatímco v roce 1900 by se veškeré matematické vědění vešlo zhruba do 80 knih, na shrnutí dnešních znalostí bychom jich potřebovali statisíce. Tento neobyčejný rozmach nevycházel pouze z tehdejší klasické matematiky, ale především ze zcela nových odvětví. Na začátku 20. století se matematika skládala přibližně z dvaceti přesně vymezených oblastí: aritmetiky,

geometrie, diferenciálního a integrálního počtu atd. Dnes by se dalo takových oblastí nalézt zhruba 60 až 70. Některé obory, například algebra a topologie, se dále rozdělily na nejrůznější podobory. Jiné, jako třeba teorie výpočetní složitosti či teorie dynamických systémů, jsou zcela nové.

Věda o strukturách

Při tak ohromném rozvoji by se mohlo zprvu zdát, že na otázku *Co je to matematika?* máme jednoduchou, i když trochu povrchní odpověď: „Je to vše, čím se zabývají matematikové.“ Určitý obor spadal do matematiky ne podle toho, *co* bylo předmětem zkoumání, ale podle toho, *jak* to bylo zkoumáno – tedy podle užité metodologie. V posledních asi třiceti letech byla zformulována definice matematiky, se kterou většina dnešních matematiků souhlasí: *matematika je vědou o strukturách*. Matematik zkoumá abstraktní numerické struktury, struktury tvarů, zákony pohybu, principy chování a rozhodování, podstatu pravděpodobnosti atd. Všechny struktury mohou být skutečné nebo uměle sestavené, zjevné nebo skryté, statické nebo dynamické, kvalitativní nebo kvantitativní, ryze účelové nebo vymyšlené jen tak pro zábavu. Jejich podstata vychází ze světa, který nás obklopuje, z hlubin prostoru a času i z labyrintu lidské mysli. Podle různých typů struktur pak vznikla rozličná odvětví. Například:

- *Aritmetika a numerika* zkoumají struktury čísel a počítání.
- *Geometrie* se zabývá strukturou tvarů.
- *Diferenciální a integrální počet* nám umožňuje studovat pohyb a změnu.
- *Logika* analyzuje principy uvažování.
- *Teorie pravděpodobnosti* se snaží stanovit nějaký řád pro náhodné jevy.
- *Topologie* zachycuje podstatu vzájemné polohy a podobnosti.

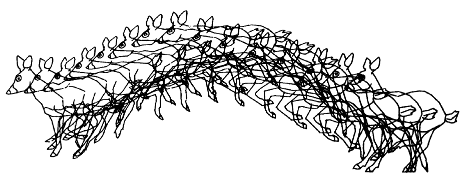
Tato kniha se snaží přiblížit čtenáři moderní koncepci matematiky, kterou předkládá v osmi kapitolách, zaměřených po řadě na: numerické struktury; principy rozhodovacích procesů a komunikace; zákonitosti pohybu a změny; struktury tvaru; vlastnosti symetrie a pravidelnosti; topologické struktury, pravděpodobnostní struktury a základní struktury vesmíru.

Paradox pohybu

Kalkulus se používá spíše pro spojitý než pro diskrétní pohyb. Ale již při prvním rozboru se nám sama myšlenka spojitého pohybu může zdát paradoxní. Uvažujme: v určitém časovém okamžiku se libovolný předmět nalézá na určitém místě v prostoru. Ve zmíněném okamžiku je sledovaný předmět nerozlišitelný od stejného objektu, který je v klidu. Jestliže toto má platit pro každý časový okamžik, jak se může předmět vůbec pohybovat? Je-li v klidu v každém okamžiku, pak je v klidu pořád (viz obr. 3.3).

Tento paradox pohybu vyslovil Zenon, patrně jako argument proti numericky založené matematice pythagorejců. Zenon, který žil kolem roku 450 př. n. l., byl žákem řeckého filozofa Parmenida, zakladatele elejské školy. Zenon svou myšlenku původně formuloval na příkladě letícího šípu. Považujeme-li prostor za velké množství sousedících bodů a čas za posloupnost nespojitých časových okamžiků, je Zenonova hádanka skutečným paradoxem.

Kdo nevěří v atomickou strukturu času a prostoru a domnívá se, že obě veličiny lze donekonečna dělit, může se zamyslet nad dalším, snad nejznámějším Zenonovým paradoxem o Achillovi a želvě. Achilles má závodit s želvou v běhu na 100 metrů. Protože je Achilles desetkrát rychlejší než želva, dostane želva desetimetrový náskok. Závod je odstartován a Achilles začíná želvu dohánět. Achilles uběhne 10 metrů a dostane se do místa, z něhož startovala želva. V tento okamžik urazila želva již jeden metr, takže má před Achillem náskok jednoho metru. Achilles uběhne tuto vzdálenost, ale želva je stále napřed – nyní o desetinu metru.



Obr 3.3 Paradox pohybu: v každém okamžiku je libovolný předmět v klidu. Tuto myšlenku ilustruje obrázek skákající laně. Platí-li to pro každý okamžik, pak by měl být předmět v klidu neustále. Jak vůbec tedy může pohyb začít? Řecký filozof Zenon předložil paradox jako výzvu těm, kteří věřili v čas jakožto nespojitou posloupnost časových okamžiků.

Ve chvíli, kdy Achilles dosáhne i tohoto bodu, je želva o setinu metru před ním. A tak dále až do nekonečna. Ačkoli je náskok želvy stále menší a menší, želva stále vede, což znamená, že Achilles nikdy nemůže tento závod vyhrát.

Účelem těchto paradoxů není polemizovat nad tím, zda šíp létá nebo jestli Achilles může předběhnout želvu. O těchto nepopiratelných faktech z naší každodenní zkušenosti není třeba diskutovat. Ve skutečnosti představovaly Zenonovy paradoxy řadu témat, která se týkala pravé podstaty prostoru, času a pohybu. Staří Řekové si takto kladli otázky, na něž nedokázali odpovědět. K uspokojivému vysvětlení těchto paradoxů došlo až na konci 19. století, kdy se matematici konečně pustili do opravdového zápasu s nekonečnem.

Krocení nekonečna

Klíč k možnému rozvoji matematických teorií pohybu a změny spočíval v nalezení způsobu práce s nekonečnem. Bylo nutné popsat a zpracovat různé modely, které by nekonečno zahrnovaly.

Například Zenonův paradox o Achillovi a želvě vyřešíme, jakmile odhalíme jeho matematickou strukturu. Náskok želvy před Achillem je v jednotlivých stadiích závodu (v metrech):

$$10, 1, \frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}, \ldots$$

Je tedy zřejmé, že paradox nějak souvisí s nekonečným součtem:

$$10 + 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \ldots,$$

kde tři tečky znamenají, že součet pokračuje podle daného vzoru do nekonečna.

Součet všech těchto nekonečně mnoha sčítanců nelze provést prostým sečtením. Jednotlivé sčítance ani nemůžeme všechny vypsat, takže termín „součet“ v obvyklém smyslu slova je zde trochu zavádějící. Aby se matematici této nepřesnosti vyvarovali, takový nekonečný součet nazývají *nekonečnou řadou*. Je to jeden z mnoha příkladů, kdy matematici přiřazují běžnému slovu určitý technický význam, který pak často pouze vzdáleně připomíná původní pojem.

Když přeneseme pozornost od jednotlivých členů řady k její obecné struktuře, snadno dostaneme součet celé řady, který si označíme jako S:

$$S = 10 + 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \dots$$

Struktura této řady spočívá v tom, že každý člen řady je desetinou předcházejícího členu. Vynásobíme-li celou řadu číslem 10, dostaneme vlastně původní řadu, jež má navíc první člen (100):

$$10S = 100 + 10 + 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \dots$$

Odečteme-li nyní první rovnici od druhé, pak se všechny členy na pravé straně až na počáteční člen 100 druhé řady vyruší:

$$10S - S = 100.$$

Tuto jednoduchou rovnici vyřešíme obvyklým způsobem:

$$9S = 100,$$

tedy

$$S = \frac{100}{9} = 11\frac{1}{9}.$$

Jinými slovy – Achilles dohoní želvu přesně po 11 a 1/9 metrech.

Vtip spočívá tedy v tom, že nekonečná řada čísel může mít konečný součet. Zenonova hádanka je skutečným paradoxem jedině tehdy, pokud předpokládáme, že nekonečná řada musí mít také nekonečný součet.

Abychom nalezli součet nekonečné řady, museli jsme přenést pozornost od sčítání jednotlivých členů k identifikaci obecné struktury. A to je také v kostce návod ke zvládnutí nekonečna.

Nekonečno vrací úder

Možná vám není tak úplně jasné, zda lze vždy vynásobit nekonečnou řadu konstantním číslem – jak jsem vám ukázal na příkladu Achilla a želvy – nebo jestli je odčítání jedné řady od druhé, člen po členu, oprávněnou operací. Matematické struktury obsahující nekonečno se někdy chovají podivně, takže při práci s nimi se snadno dopustíme chyby. Uvažujme například následující řadu:

$$S = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

Jestliže vynásobíme řadu číslem -1, dostaneme – až na první člen (1) – stejnou řadu:

$$\begin{aligned} S &= 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots \\ -S &= \quad\;\; - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots \end{aligned}$$

Jestliže nyní odečteme druhou řadu od první, všechny členy kromě prvního členu první řady se vyruší, takže dostaneme

$$2S = 1.$$

Konečný výsledek je tedy $S = 1/2$.

Všechno se zdá být v naprostém pořádku. Nyní zkusíme spárovat členy původní řady takto:

$$S = (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \dots$$

Opět se zdá, že tento model párování lze zobecnit na nekonečně mnoho dvojic řady. Každá dvojice se ale rovná číslu 0, a tím dostáváme

$$S = 0 + 0 + 0 + \dots,$$

což znamená, že $S = 0$.

Členy řady však můžeme spárovat i takto:

$$S = 1 + (-1 + 1) + (-1 + 1) + (-1 + 1) + \dots$$

Tentokrát je výsledkem $S = 1$.

Původní řada měla zřetelnou strukturu. Zpracovali jsme ji třemi různými způsoby a pokaždé jsme dostali jiný výsledek: $S = 1/2, 0, 1$. Který z nich je správný?

Ve skutečnosti ani jeden. Strukturu této řady nelze matematicky zachytit. Navíc lze dokázat, že součet této nekonečné řady jednoduše neexistuje. Na druhé straně součet řady, kterou jsme odvodili z paradoxu o Achillovi a želvě, se zdál správný a všechny prováděné operace přípustné. Matematikové hledali vhodnou metodu k vyjádření součtu nekonečné řady celá staletí. Mimo jiné museli od sebe odlišit řady, které lze upravovat, od těch, kde to možné není. Jejich snaha přinesla ovoce až ke konci 19. století.

Zvláště elegantní příklad na součet nekonečné řady, který dostaneme úpravami její struktury, nabízí tzv. *geometrická řada*

$$S = a + aq + aq^2 + aq^3 + \dots,$$

kde každý následující člen se liší od předcházejícího o určitý konstantní kvocient q. Aniž si to možná uvědomujeme, s geometrickými řadami se setkáváme v reálném životě poměrně často – například při radioaktivním rozpadu nebo při výpočtu úroku, který musíme zaplatit, chceme-li si vzít bankovní úvěr nebo hypotéku. Řada vyplývající z paradoxu o Achillovi a želvě je také geometrická. (Jejím kvocientem je 1/10.) Ve skutečnosti jsou úpravy, které jsme provedli při jejím součtu, přípustné u všech geometrických řad. Když chceme získat hodnotu jejího součtu S, vynásobíme řadu společným kvocientem q, a tím dostaneme novou řadu

$$Sq = aq + aq^2 + aq^3 + aq^4 \ldots,$$

kterou nyní odečteme od původní řady. Všechny členy kromě počátečního členu první řady se vyruší, takže získáme rovnici

$$S - Sq = a.$$

Vyjádřením neznámé S dospějeme k výsledku

$$S = \frac{a}{(1-q)}.$$

Jedinou otázkou zůstává platnost právě provedených úprav. Detailnější studium struktury geometrické řady ukazuje, že zmíněné úpravy lze provádět pouze tehdy, je-li kvocient q menší než 1 (v případě záporného kvocientu musí být q větší než -1).

Například řada

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots$$

má počáteční člen $a = 1$ a kvocient $q = \frac{1}{2}$, takže její součet je

$$S = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2.$$

Leží-li hodnota kvocientu q v intervalu $(-1, 1)$, pak se jednotlivé členy řady postupně zmenšují. Rozhoduje právě tento faktor o konečném součtu nekonečné řady?

Tato hypotéza se zdá na první pohled rozumná. Jestliže se členy postupně zmenšují, pak se jejich vliv na celkový součet neustále snižuje. Pokud platí, měla by mít konečný součet i následující elegantní řada

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$$

Pro její podobnost se strukturou hudební stupnice jí říkáme *harmonická řada*.

Sečteme-li dohromady jejích prvních tisíc členů, dostaneme hodnotu 7,485 (zaokrouhleno na tři desetinná místa); součet prvního milionu členů je 14,357; první miliardy členů přibližně 21 a prvního bilionu členů asi 28. Ale jaký je součet celé nekonečné řady?

Hledaná hodnota neexistuje, jak už ve 14. století zjistil Nicolae Oresme. Postupné zmenšování členů řady není tedy postačující podmínkou k tomu, abychom došli ke konečnému výsledku.

Jak dokážeme, že harmonická řada nemá konečný součet? Rozhodně nikoli postupným sčítáním jednotlivých členů. Kdybychom měli člen po členu vypisovat na pásku, například jeden člen na jeden centimetr, pak bychom popsali přibližně 10^{43} centimetrů pásky, než by součet vypsaných členů překročil číslo 100. (Navíc se takto dopouštíme hrubého podcenění, neboť jak postupujeme dále v řadě, potřebujeme k zápisu jejích členů stále více a více číslic.) Nicméně 10^{43} centimetrů je asi 10^{25} světelných let, což reprezentuje vzdálenost, která přesahuje velikost celého vesmíru, jež se v současnosti odhaduje na 10^{12} světelných let.

Cesta k důkazu neexistence konečného součtu harmonické řady vede samozřejmě přes její matematickou strukturu. Nejprve si uvědomíme, že třetí a čtvrtý člen mají hodnotu alespoň 1/4, takže jejich součet je alespoň $2 \times 1/4 = 1/2$. Nejmenší z dalších čtyř členů 1/5, 1/6, 1/7 a 1/8 je 1/8, takže jejich součet je alespoň $4 \times 1/8 = 1/2$. Podobně nejnižší hodnota následujících šestnácti členů od 1/9 do 1/32 je 1/32 a také jejich součet je určitě větší než $16 \times 1/32 = 1/2$. Budeme-li uvažovat větší a větší skupiny členů (podle vzoru 2 členy, 4 členy, 8 členů, 16 členů, 32 členů, ...), dostaneme vždy částečný součet členů, který je roven přinejmenším 1/2. Tento postup vede k součtu nekonečně mnoha 1/2, což samozřejmě nemůže být konečné číslo. Součet harmonické řady – pokud ovšem existuje – musí být alespoň tak velký jako nekonečný součet řady, která se skládá ze samých 1/2. Odtud tedy plyne, že harmonická řada nemůže mít konečný součet.

Během 17. a 18. století dosáhli matematici v zápase s nekonečnými řadami dalších úspěchů. Například v roce 1671 sestavil Skot James Gregory následující rovnici:

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \ldots$$

Povšimněme si, že v součtu této nekonečné řady se objevuje konstanta π, která udává poměr obvodu libovolného kruhu k jeho průměru.

V roce 1736 nalezl Euler další nekonečnou řadu, v jejímž součtu figuruje π:

$$\frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots$$

Euler dokonce napsal o nekonečných řadách celé pojednání, které vyšlo roku 1748 pod názvem *Introductio in analysin infinitorum* (Úvod do infinitezimálního počtu).

Tím, že se matematici zaměřili spíše na obecnou strukturu než na aritmetiku, se do jisté míry podařilo zvládnout nekonečno. K významnému pokroku ve studiu struktur nekonečna došlo ve druhé polovině 17. století, kdy Newton a Leibniz vyvinuli diferenciální počet. Jejich dílo navždy změnilo život lidstva, a proto nepochybně patří k největším matematickým činům všech dob. Bez diferenciálního počtu by moderní technologie jednoduše neexistovala. Neměli bychom ani elektřinu, ani telefony nebo automobily, ani srdeční bypassy. Vědní obory, které stojí v pozadí těchto a mnoha dalších technologických objevů, se zásadní měrou opírají o kalkulus.

Klíčem jsou funkce

Diferenciálním počtem lze analyzovat pohyb a změnu, ale pouze takové, které vykazují určitou strukturu. Nejprve však musíme odhalit, jaký je mezi pohybem a změnou vztah. Kalkulus je totiž soubor postupů ke zpracování struktur. (Slovo *kalkulus* pochází z latiny a znamená „oblázek“ – první početní systémy byly charakteristické fyzickou manipulací s oblázky. Znovu si připomeňme, že výrazy „kalkulus“ a „diferenciální a integrální počet“ označujeme totéž.)

Základní operací diferenciálního počtu je proces známý jako *derivování*. Jejím účelem je získat míru změny nějaké měnící se veličiny. Hodnota, poloha nebo směr pohybu dané veličiny musí být popsány vhodným vzorcem. Derivováním tohoto vzorce se vytvoří nový, který již udává hledanou míru změny. Derivování tedy vlastně transformuje jeden vzorec v druhý.

Představme si například auto, které jede po silnici. Předpokládejme, že proměnná s označuje dráhu auta, jež se mění v závislosti na čase t podle vzorce

$$s = 5t^2 + 3t.$$

Podle diferenciálního počtu je rychlost auta v (míra změny polohy) v libovolném čase t dána vzorcem

$$v = 10t + 3.$$

Výraz $10t+3$ vznikne derivováním výrazu $5t^2+3t$. (Zanedlouho uvidíme, jak se vlastně derivování provádí.)

Povšimněme si, že rychlost auta není v tomto případě konstantní, ale mění se s časem. Podobně se chová i vzdálenost. Ve skutečnosti lze proces derivování provést znovu a získat tak zrychlení (tj. míru změny rychlosti). Derivováním výrazu $10t + 3$ dostaneme zrychlení

$$a = 10,$$

které je konstantní.

Základním matematickým objektem derivování je *funkce*. Bez ní by kalkulus neexistoval. Stejně tak, jako je aritmetické sčítání operací s čísly, je derivování operací, kterou provádíme s funkcí.

Co vlastně je funkce? Funkce je matematický předpis, podle kterého je ke každému číslu z dané množiny přiřazeno jiné číslo (funkční hodnota). (Přesněji řečeno, naše definice je pouze speciálním případem funkce, ale pro nástin kalkulu zcela postačí.)

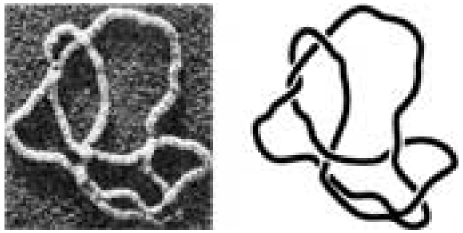
Například následující předpis určuje funkci pomocí polynomu

$$y = 5x^3 - 10x^2 + 6x + 1.$$

Dosazením libovolné hodnoty x do výše uvedeného předpisu a následným výpočtem získáme funkční hodnotu y. Jestliže například $x = 2$, pak

$$y = 5 \times 2^3 - 10 \times 2^2 + 6 \times 2 + 1 = 40 - 40 + 12 + 1 = 13.$$

Jinými příklady funkcí jsou *goniometrické funkce* $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$. Zde již hodnotu y nespočítáme tak snadno jako v případě polynomů. Goniometrické funkce se běžně definují pomocí poměrů různých stran pravoúhlého trojúhelníka, ale tyto definice lze použít jen pro úhel x, který je menší než pravý úhel. Funkci tangens definujeme pomocí funkcí sinus a kosinus:



Obr. 6.20 Vlevo: Snímek řetězce DNA pořízený elektronovým mikroskopem. Vpravo: kresba znázorňující uzlovou strukturu, kterou tvoří molekula DNA.

studují uzlovou strukturu napadené buněčné DNA. Stále věří, že se jim tímto postupem podaří vyvinout odpovídající léčbu.

Nyní přejdeme od biologie k fyzice. Nejprve bych rád poznamenal, že již roku 1867 předložil lord Kelvin tzv. *teorii vírových atomů*, v níž považoval atomy za uzly v éteru. Teorie byla docela důvěryhodná, protože vycházela z celkem rozumných předpokladů. Vysvětlovala stabilitu hmoty a brala v úvahu velké množství různých atomů, které pocházely z bohatých množin uzlů, které studovali odborníci na teorii uzlů. Teorie vírových atomů poskytla také vysvětlení pro mnoho atomických jevů. Kelvinova teorie se následně stala hnací silou pro některé z raných prací, které se týkaly uspořádání uzlů. Například jeho spolupracovník P. G. Tait vytvořil rozsáhlé tabulky uzlů. Přesto teorie vírových atomů skončila – přes všechnu svou matematickou eleganci – na smetišti dějin vědy stejně jako Platonova atomická teorie, kterou jsme se zabývali ve 4. kapitole. Nakonec ji nahradila idea atomu jakožto miniaturní sluneční soustavy, kterou předložil Niels Bohr.

V dnešní době se však i Bohrova teorie považuje za příliš naivní, a tak se dostává opět do popředí uzlová teorie. Současní fyzici tvrdí, že hmota se skládá z takzvaných *superstrun* – nepatrných, zauzlených a uzavřených smyček v časoprostoru, jejichž vlastnosti jsou těsně svázány se stupněm uzlu.

Vraťme se nyní opět k hlavnímu tématu. Po objevu Jonesových polynomů v roce 1987 byly nalezeny další polynomiální invarianty vycházející z myšlenek statistické mechaniky, která je oborem aplikované matematiky, jenž studuje molekulární chování kapalin a plynů. Zanedlouho se zjistilo, že se uzlově-teoretická struktura zachycená Jonesovým polynomem objevuje ve statistické mechanice. Zdá se, že uzly jsou všude, přesněji řečeno – modely, jimiž se uzly vyznačují, jsou všude.

Všudypřítomnost uzlů lze zvláště dobře pozorovat na překotném vývoji topologické teorie kvantových polí, která je novou fyzikální teorií,

již na konci 80. let 20. století vyvinul Edward Witten. Matematický fyzik sir Michael Atiyah jako první tvrdil, že Jonesův polynom lze využít k pokusům o zachycení a porozumění struktuře fyzikálního vesmíru. Witten odpověděl na Atiyahův podnět tak, že vytvořil skutečně hlubokou teorii, která zobecňuje a dále rozvíjí poznatky vycházející z kvantové teorie, Jonesových polynomů a zásadní práce Simona Donaldsona, o níž jsem se zmínil již dříve. Nová a mocná syntéza myšlenek poskytla fyzikům úplně nový pohled na vesmír a matematikům umožnila proniknout do podstaty teorie uzlů. Úspěšné sloučení topologie, geometrie a fyziky slibovalo, že povede k dalším objevům ve všech třech zmíněných disciplínách. K tomuto tématu se ještě vrátím v 8. kapitole. Zatím bychom měli vzít na vědomí, že byla vývojem matematické teorie uzlů vytvořena nová cesta k pochopení určitých aspektů světa – a to jak živého světa, jemuž vládne DNA, tak hmotného vesmíru, v němž žijeme.

Velká Fermatova věta opět na scéně

Nyní konečně uzavřeme výklad o velké Fermatově větě, s nímž jsme začali v 1. kapitole. Připomeňme si, že úkolem je dokázat, že pro žádné přirozené číslo $n > 2$ nemá rovnice

$$x^n + y^n = z^n$$

netriviální celočíselné řešení. Při naší každodenní zkušenosti s celými čísly se nám asi zdá, že na tak jednoduchou otázku nebude obtížné odpovědět. Bohužel je tento dojem pouze zdánlivý. K zodpovězení mnohých jednoduše formulovaných otázek je často třeba odkrýt hluboce ukryté struktury. Existuje mnoho takových struktur souvisejících s velkou Fermatovou větou, a některé jsou opravdu velmi složité. Na celém světě se najde sotva pár desítek matematiků, kteří by byli schopni zcela porozumět posledním pracím, jež se tomuto tématu věnují. Přesto je velmi užitečné alespoň nastínit, jak řešení takového složitého problému probíhalo, protože tak uvidíme, jak jsou na první pohled zcela odlišné oblasti matematiky navzájem propojeny svými složitými, v hloubce ukrytými strukturami.

V posledních asi padesáti letech vycházela většina prací na toto téma z Fermatovy věty přeformulované na problém řešení rovnic v oboru racionálních čísel. Především si uvědomme, že celočíselné řešení rovnice ve tvaru

$$x^n + y^n = z^n$$

(včetně případu $n = 2$) je ekvivalentní racionálnímu řešení rovnice

$$x^n + y^n = 1.$$

Dostaneme-li celočíselné řešení první rovnice, například $x = \mathrm{a}$, $y = \mathrm{b}$, $z = \mathrm{c}$ (kde a, b, c jsou celá čísla), pak řešením druhé rovnice v oboru racionálních čísel je $x = \mathrm{a/c}$, $y = \mathrm{b/c}$. Například

$$3^2 + 4^2 = 5^2,$$

kde $x = 3$, $y = 4$, $z = 5$, je celočíselné řešení první rovnice. Vydělíme-li každou složku řešení hodnotou proměnné z, tedy číslem 5, získáme řešení druhé rovnice v oboru racionálních čísel (konkrétně $x = 3/5$, $y = 4/5$):

$$\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 1.$$

Máme-li nyní naopak obecné řešení druhé rovnice v oboru racionálních čísel, řekněme $x = \mathrm{a/c}$, $y = \mathrm{b/d}$, pro které platí:

$$\left(\frac{a}{c}\right)^n + \left(\frac{b}{d}\right)^n = 1,$$

pak násobením obou složek tvořících řešení součinem jmenovatelů cd (ve skutečnosti postačí jejich nejmenší společný násobek) dostaneme celočíselné řešení první rovnice ve tvaru $x = \mathrm{ad}$, $y = \mathrm{bc}$, $z = \mathrm{cd}$:

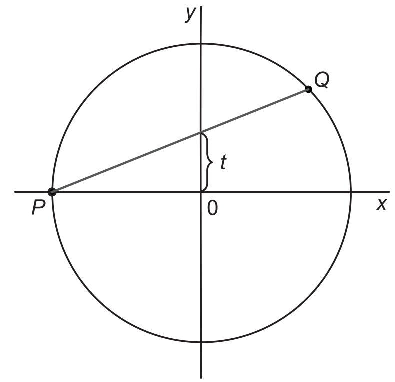
$$(ad)^n + (bc)^n = (cd)^n.$$

Je-li Fermatův problém formulován tímto způsobem (tj. v oboru racionálních čísel), lze pro řešení použít také geometrické a topologické postupy. Například rovnice

$$x^2 + y^2 = 1$$

je rovnicí kružnice se středem v počátku a poloměrem 1. Racionální řešení této rovnice odpovídá těm bodům kružnice, jejichž obě souřadnice jsou racionálními čísly. Protože je kružnice natolik jedinečný matematický objekt, že je považována za nejdokonalejší ze všech geometrických útvarů, nalezneme řešení rovnice následujícím jednoduchým geometrickým postupem.

Podle obrázku 6.21 zvolíme nejprve libovolný bod P na kružnici. Na obrázku 6.21 má P souřadnice $[-1; 0]$, protože tak se celý problém trochu



Obr. 6.21 Geometrická metoda zjišťování pythagorejských trojúhelníků.

zjednoduší. Úkolem je nyní nalézt ty body na kružnici, jejichž obě souřadnice jsou racionální. Pro libovolný bod Q ležící na kružnici narýsujeme přímku PQ. Tato přímka v určitém bodě protne osu y. Vzdálenost tohoto průsečíku (ležícího nad nebo pod osou x) od počátku označíme jako t. Bod Q má racionální souřadnice, právě když je číslo t racionální. Prověrka tohoto tvrzení je snadným algebraicko-geometrickým cvičením. Abychom získali racionální řešení původní rovnice, stačí pouze narýsovat přímky vedené z bodu P tak, aby protínaly osu y v racionální vzdálenosti od počátku. Pak také bod Q (průsečík této přímky s kružnicí) má racionální souřadnice. Tímto způsobem získáme racionální řešení dané rovnice.

Nechť je například $t = 1/2$. Po chvilce počítání zjistíme, že bod Q má souřadnice $[3/5; 4/5]$. Podobně pro $t = 2/3$ dostaneme bod $[5/13; 12/13]$ a pro $t = 1/6$ máme bod $[35/37; 12/37]$. Tyto výsledky souvisejí s (celočíselnými) pythagorejskými trojúhelníky o stranách (3, 4, 5); (5, 12, 13) a (35, 12, 37). Podíváme-li se na výše uvedenou geometrickou metodu hlouběji, uvědomíme si, že metoda vede ke vzorci pro výpočet stran pythagorejských trojúhelníků, který jsme uvedli na stránce 30.

Pro exponent $n = 2$ nám elegantní vlastnosti kružnice umožňují geometricky zkoumat racionální řešení rovnice

$$x^n + y^n = z^n.$$

Tak snadná analýza ale neexistuje pro další hodnoty n, pro které není v žádném případě křivka jednoduchou a elegantní kružnicí (viz 6.22). Přeformulování Fermatova problému do řeči geometrie, tj. hledání bodů křivky prodalo se za první den méně než 1 000 opcí. Do roku 1995 stoupl její obrat na více než 1 milion opcí denně.

Blackův-Scholesův vzorec (a jeho Mertonovo rozšíření) sehrál tak důležitou roli v rozvoji nového akciového trhu, že když se v roce 1978 americký trh s akciemi zhroutil, označil významný časopis *Forbes* za jednoho z hlavních viníku právě tuto formuli. Sám Scholes k tomu poznamenal, že vinu nenesl jeho vzorec, ale spíše obchodníci, kteří se jej nenaučili pořádně používat.

Udělení Nobelovy ceny Scholesovi a Mertonovi ukazuje, jak velký vliv má na celý svět jeden jediný matematický vzorec, který opět zdůraznil přínos matematiky pro náš každodenní život.

8. kapitola

Skryté struktury vesmíru

Poutníci

Přes veškeré technické vymoženosti druhé poloviny 20. století se málokdo dokáže za jasné noci zahledět na oblohu, plnou zářících hvězd, bez jistého záchvěvu bázně. Přestože víme, že jasně blikající světla, která vidíme, jsou přírodními nukleárními reaktory stejnými jako naše Slunce, nijak to nesnižuje náš dojem z tohoto velkolepého představení. Pokud si navíc uvědomíme, že světlo z mnohých hvězd k nám letělo miliony let, náš dojem z neomezené velikosti vesmíru se ještě znásobí.

Když uvážíme svou reakci a uvědomíme si, že podobný úžas pociťovali při stejné příležitosti i naši předkové, asi nás příliš nepřekvapí, že při prvních pokusech o pochopení zákonů přírody hrály hvězdy důležitou roli.

Starověcí Egypťané a Babyloňané pozorovali Slunce a Měsíc. Podle svých poznatků o pravidelných pohybech obou těles a na základě sledování ročních období sestavovali kalendáře, které pak využívali pro práci v zemědělství. Obě zmíněné civilizace ale postrádaly dostatečné matematické znalosti na to, aby vytvořily propracované teorie nebeských těles. Výrazný pokrok učinili Řekové kolem roku 600 př. n. l. Zdá se, že jak Thales (o němž jsme se už zmínili jako o učenci, který do matematiky zavedl ideu důkazu), tak Pythagoras se pokusili matematickými prostředky o seriózní popis složených pohybů některých hvězd. Nyní již víme, že „hvězdy“, jejichž pohyby je nejvíce mátly, nebyly vůbec hvězdami, ale planetami naší sluneční soustavy. Slovo *planeta* je odvozeno ze souboru pohybů, které Řekové pozorovali – řecké slovo *planétés* znamená „poutník“.

Pythagorejci tvrdili, že Země má určitě tvar koule, a tento názor navzdory naprostému nedostatku důkazů převzali další řečtí filozofové. Matematické potvrzení kulového tvaru Země podal nakonec Eratosthenes asi roku 250 př. n. l. Měřením výšky Slunce nad obzorem ze dvou různých míst dokázal, že je Země kulatá, a navíc s 99% přesností vypočítal její průměr.

Ještě před Eratosthenem navrhl Platonův žák Eudoxos (asi 408 až 355 př. n. l.) model vesmíru, který se skládal z řady soustředných kulových sfér, v jejichž středu se nalézala nehybná Země. Každá hvězda se pohybovala po jedné z těchto sfér. Není známo, jak Eudoxos vysvětlil složený pohyb planet (putujících hvězd), a jeho vlastní práce na toto téma se bohužel nedochovala. Také nevíme, jak si Eudoxos vysvětloval proměnlivou jasnost planet. Kdyby se planeta pohybovala po pevně dané sféře kolem nehybné Země, umístěné ve středu této sféry, pak by se její jasnost neměnila. Přes jisté technické nedostatky je Eudoxova teorie důležitá, protože znamenala první pokus o popis nebeských těles matematickými prostředky.

V polovině 5. století př. n. l. navrhl Herakleitos pro proměnlivou jasnost planet i pro jejich složený pohyb možné vysvětlení. Jeho teorie se skládala ze dvou revolučních myšlenek: jednak, že se Země otáčí kolem své osy, a dále, že pohyby příznačné pro Venuši a Merkur vyplývají z jejich kruhové oběžné dráhy kolem Slunce. O něco později, asi kolem roku 300 př. n. l., se Aristarchos ze Samu dostal ještě o krok dále než Herakleitos, když vyslovil heliocentrickou hypotézu: Země se pohybuje kolem Slunce.

Žádná z těchto hypotéz se však neujala, a tak se kolem roku 150 př. n. l. Hipparchos vrátil k Eudoxovu geocentrickému modelu. Přesto se dostal o něco dále. Hipparchos tvrdil, že se všechny planety pohybují po kruhových drahách, přičemž středy těchto drah obíhají také po kruhových drahách – stejně jako dnes víme, že Měsíc obíhá kolem Země, která zase obíhá kolem Slunce.

Geocentrický model převzal ve 2. století př. n. l. také Ptolemaios, pravděpodobně největší řecký astronom, jehož třináctisvazkové dílo *Syntaxis megalé* (Velká soustava) tvořilo pod arabským názvem *Almagest* až do doby M. Koperníka kánon středověké astronomie. Ptolemaiova teorie, která vycházela z Eudoxova přístupu soustředných sfér, vytvořila přesný matematický model, jenž odrážel měření, která Řekové postupem času prováděli se stále vyšší přesností.

Snížení počtu kruhových drah, po nichž se pohybujeme

Mezi vzdělanci raného a vrcholného středověku (přibližně v letech 500–1500 n. l.) dominovali představitelé katolické církve. Proto učenci, kteří se pokoušeli vysvětlit chod vesmíru na vědeckých základech, neměli na růžích ustláno. Podle převažující církevní doktríny člověk neměl právo přemýšlet nebo dokonce pochybovat o Božských záměrech, protože Jeho úmysly a plány náležely jen Jemu samému. Na druhé straně církev učila, že se člověk má ze všech svých sil snažit, aby pochopil

Boží vůli. Několik odvážných myslitelů 16. století, kteří viděli v tomto příkaze určitou příležitost, přišlo s novou teorií, že Bůh vytvořil vesmír podle matematických zákonů. Úsilí vynakládané na pochopení těchto zákonů je tedy nejenom přípustné, ale představuje dokonce Boží vůli.

Raně renesanční učenci, kterým se tak znovu otevřely dveře k soustavnému pěstování matematické astronomie, vzkřísili starořecké ideje a podepřeli je mnohem přesnějšími měřeními. Mystické úvahy založené na dogmatu postupně ustupovaly racionální analýze, která vycházela z matematických důkazů. Myšlenka, že svými výzkumy pouze sledují Boží vůli, chránila matematiky a astronomy až do doby, kdy se jejich objevy dostaly do přímé konfrontace s tvrzením, že Země je středem vesmíru – jedním z nejzákladnějších církevních dogmat. Mikuláš Koperník (1473–1543) byl oním nešťastníkem, jenž se ocitl přímo ve středu bouře, kterou tento střet vyvolal.

Do Koperníkova příchodu se astronomové snažili přizpůsobit Ptolemaiovu soustavu tak, aby vyhovovala narůstajícímu množství pozorování. Jejich úsilí vedlo k vytvoření komplikovaného systému, v němž byl pohyb Slunce, Měsíce a pěti v té době známých planet popsán pomocí 77 kružnic. Koperník, který znal Aristarchův heliocentrický model, si položil otázku, zda by předpoklad heliocentrické soustavy nevedl k jednoduššímu vysvětlení pohybů všech zmíněných nebeských těles. Přestože model, který by odpovídal tehdejším pozorováním, vyžadoval značnou míru vynalézavosti, Koperníkovi se nakonec podařilo zredukovat 77 kruhových drah geocentrického modelu na 34 v modelu heliocentrickém.

Z matematického hlediska představovala Koperníkova heliocentrická soustava mnohem dokonalejší model než její předchůdce. Na druhé straně však musela čelit tvrdé opozici ze strany církve, která hlásala, že tato nová teorie je „mnohem odpornější a křesťanskému světu nebezpečnější než cokoliv napsané v Kalvínových a Lutherových dílech či v jiných kacířských pracích“. Dánský astronom Tycho de Brahe vynaložil nesmírné úsilí, aby Koperníkovu teorii vyvrátil. Proto vykonal velké množství co nejpřesnějších astronomických měření, ale nakonec musel uznat, že získané poznatky jednoznačně potvrdily oprávněnost heliocentrického modelu.

Ve skutečnosti – především na základě de Brahových podrobných a rozsáhlých měření – zjistil Johannes Kepler (1571–1630), že se planety nepohybují kolem Slunce po kružnicích, ale po eliptických drahách. Tři Keplerovy zákony o pohybu planet (již jsem se o nich zmínil ve

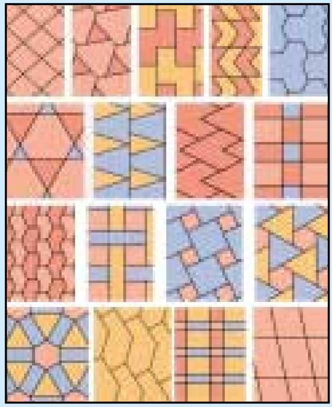
Rejstřík

edice aliter

Keith Devlin
Jazyk matematiky
Jak zviditelnit neviditelné

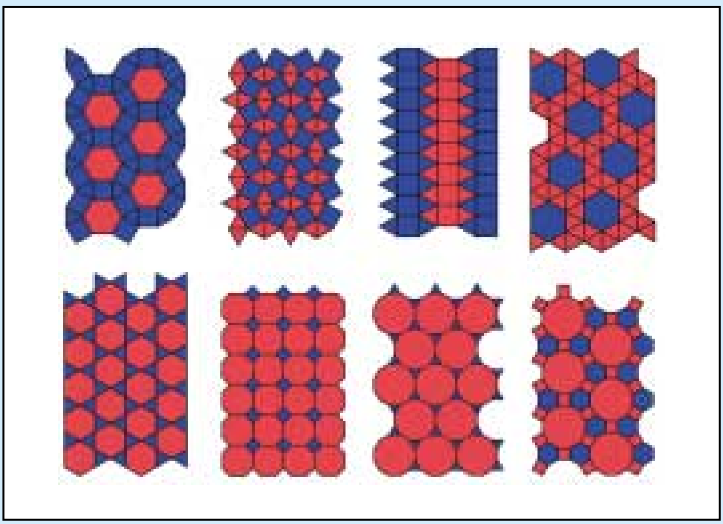
První vydání v českém jazyce.
Z anglického originálu The Language of Mathematics.
Making the Invisible Visible přeložil Jan Švábenický.
Odborná a terminologická konzultace
Luboš Pick a Alexandr Rosen.
Odpovědná redaktorka Michaela Tichá (Redigo).
Korektura Daniela Pilařová (Redigo).
Kresby Zdeněk Kárník.
Obálka s použitím fraktálu „Ledová královna“
a grafická úprava Martin Radimecký.
Sazba Bohumil Bednář.
Vydala roku 2003 nakladatelství Dokořán, s. r. o.,
Kováků 10, Praha 5, dokoran@dokoran.cz,
http://www.dokoran.cz jako svou 21. publikaci
a nakladatelství Argo, Milíčova 13, Praha 3, argo@iargo.cz,
http://www.kosmas.cz/argo jako svou 576. publikaci.
Vytiskla Akcent tiskárna Vimperk, s. r. o.,
Špidrova 49, 385 01 Vimperk.
Doporučená cena 350,- Kč

ISBN 80-86569-09-8 (Dokořán) 80-7203-470-7 (Argo)



Příloha 8: Tapetové vzory odpovídající sedmnácti možným grupám symetrií.

Příloha 7: Textilní vzor Williama Morrise se vyznačuje zřetelnou translační symetrií.



Příloha 9: Osm způsobů jak vydláždit rovinu dvěma či více pravidelnými mnohoúhelníky, má-li být jejich uspořádání kolem každého vrcholu totožné.