*Člověk uvidí jednoduchost, se kterou vedou tyto pojmy k vlastnostem již známým a k nekonečnu ostatních, s nimiž běžná geometrie tak snadno nepracuje.*
Jean-Victor Poncelet

První z potřebných objevů, označovaný jako projektivní geometrie, se zrodil uprostřed válečné vřavy. Na počátku 18. století Francie, Anglie, Rakousko, Prusko, Španělsko, Nizozemí a další země soupeřily o moc. Stále znovu se tvořila a zase rozpadala různá spojenectví. Hlavní spor se rozhořel kvůli koloniím a evropské státy bojovaly o nadvládu nad obchodem s Novým světem. Francie, Anglie a další státy se v první polovině 18. století střetly několikrát a zhruba čtvrt století po Newtonově smrti válka propukla naplno. Francie, Rakousko, Španělsko a Rusko bojovaly tehdy proti Anglii a Prusku po celých devět let.

V roce 1763 Francie kapitulovala a Sedmiletá válka (boje totiž probíhaly přes dva roky ještě před oficiálním vyhlášením války) skončila. Vítězství sice učinilo z Anglie přední světovou mocnost, ale přišlo ji na druhé straně velice draho. Jak Francie, tak i Anglie byly vyčerpány a zadluženy a čekaly je důsledky střetnutí – revoluce. Ani ne po deseti letech od konce Sedmileté války začala americká revoluce a tato revolta připravila Anglii o její nejbohatší kolonii. V roce 1789, když George Washington složil přísahu při nástupu do prezidentského úřadu v nově vzniklých Spojených státech, pak vypukla revoluce také ve Francii. O čtyři roky později popravili zdejší revolucionáři francouzského krále.

Zprávu revoluční vlády o králově popravě podepsal matematik Gaspard Monge. Monge byl vynikajícím geometrem specializujícím se na třírozměrnou (prostorovou) geometrii. Přišel na způsob, který začali architekti a inženýři používat při projektování budov a konstrukci strojů. Náčrty se zhotovovaly jako průměty předmětů do vertikální a horizontální roviny (půdorys, nárys, bokorys) a přitom se zaznamenávaly veškeré informace potřebné pro zpětnou konstrukci objektu. Mongova práce byla pokládána za natolik důležitou pro francouzskou armádu, že její značná část byla revoluční vládou a následující vládou Napoleonovou prohlášena za státní tajemství.

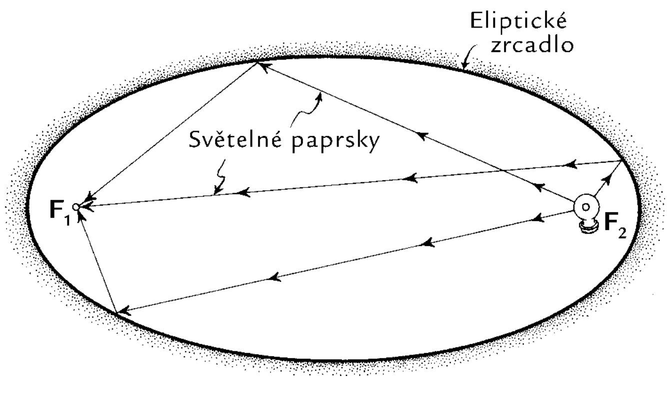
Jedním z Mongových studentů byl i Jean-Victor Poncelet. S třírozměrnou geometrii se seznámil, když se připravoval na práci mechanika Napoleonovy armády. Ke své smůle Poncelet vstoupil do armády právě v době, kdy Napoleon zahájil tažení na Moskvu.

Při ústupu z Moskvy byla Napoleonova armáda těžce zdecimována krutou zimou a rychlým postupem ruského vojska. Po bitvě o Krasnoj zůstal Poncelet ležet na bitevním poli; dosud ovšem žil a padl tedy do ruského zajetí. V ruském vězení pak založil novou matematickou disciplínu – projektivní geometrii.

Ponceletova matematika představovala završení práce, kterou začali umělci a architekti patnáctého století. Lidé jako Filippo Brunelleschi a Leonardo da Vinci tehdy objevili, jak znázorňovat objekty realisticky – tedy v perspektivě. Když se „rovnoběžné“ přímky na obraze protínají v úběžníku, pozorovatel je ošálen a domnívá se, že se tyto přímky nesetkají nikdy. Čtverce na podlaze se v obrazu mění na lichoběžníky; všechno je trochu zdeformováno, ale divákovi to připadá naprosto přirozené. Je to prostě vlastnost nekonečně vzdáleného bodu – naší nuly v nekonečnu.

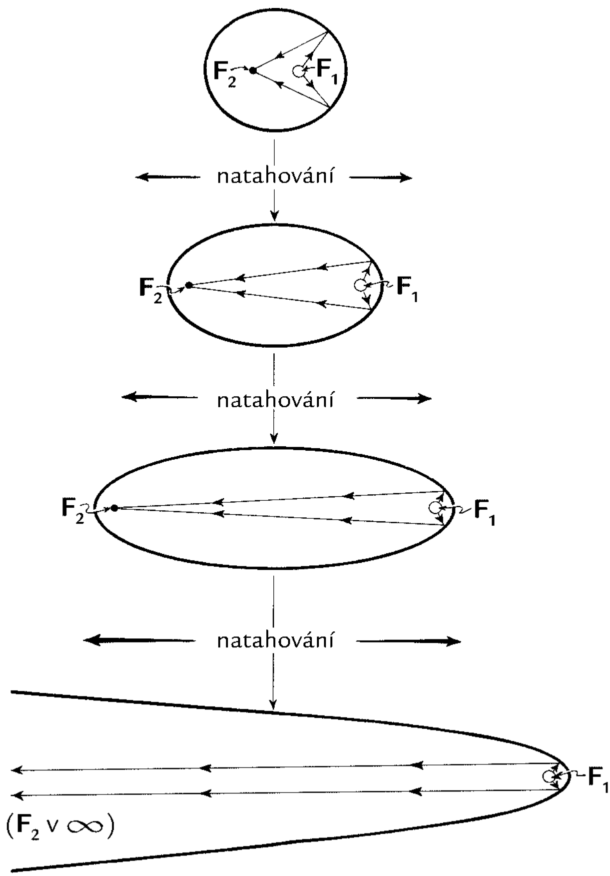
Johannes Kepler, muž, který objevil, že se planety pohybují po eliptických drahách, pojal myšlenku nekonečně vzdáleného bodu v ještě obecnější podobě. Elipsy mají dva středy, kterým říkáme ohniska. Čím je elipsa protaženější, tedy méně podobná kružnici, tím jsou oba tyto středy od sebe vzdálenější. Ale všechny elipsy mají stejnou vlastnost: vezmeme-li zrcadlo tvaru elipsy a umístíme do jednoho ohniska svítící bod, všechny světelné paprsky se soustředí v druhém ohnisku – přitom nezáleží na tom, jak dalece jsou elipsy protažené (obrázek 29).

Kepler v duchu protahoval elipsu čím dál více a posouval středy stále dále od sebe. Pak si představil, že druhé ohnisko je nekonečně vzdálené: jinak řečeno, druhý střed byl bodem v nekonečnu. Náhle se z elipsy stala parabola a všechny přímky, které se sbíhaly do tohoto bodu, se staly rovnoběžkami. Parabola je jednoduše elipsa s jedním středem v nekonečnu (obrázek 30). Tento jev můžeme velice názorně pozorovat pomocí baterky. Půjdeme do tmavého pokoje, postavíme se těsně ke zdi a zamíříme baterku přímo na zeď. Na zdi uvidíme pěkný pravidelný kruh vrženého světla. Teď vychýlíme baterku trochu do strany (obrázek 31). Spatříme kruh protažený do elipsy, která se bude protahovat čím dál více spolu s tím, jak budeme zvy-

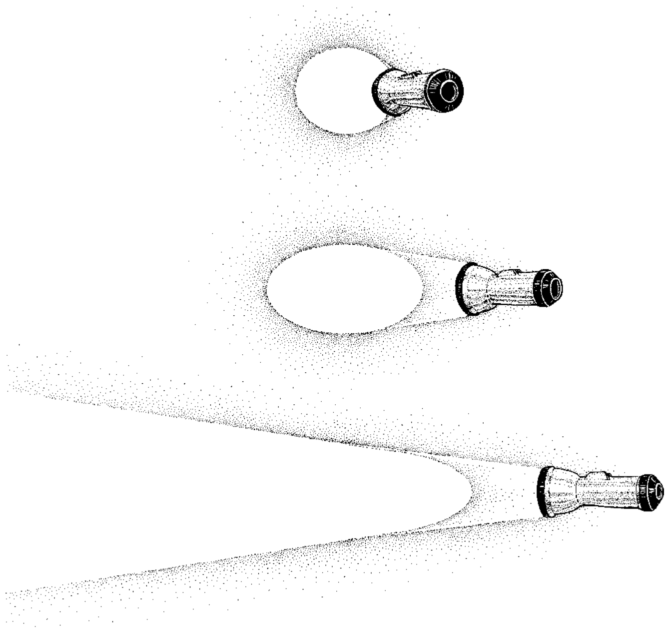



**Obr. 29:** Světelné paprsky uvnitř elipsy.

šovat sklon. A pak se najednou elipsa rozevře a stane se z ní parabola. Keplerův nekonečný bod tak dokazuje, že paraboly a elipsy jsou ve skutečnosti jedno a totéž. Tento objev stál u zrodu disciplíny zvané projektivní geometrie, ve které matematici zkoumají stíny a projekce (průměty) různých geometrických tvarů, aby odhalili skryté skutečnosti – často mnohem významnější, než je ekvivalence pa-




**Obr. 30:** Natahování elipsy vede nakonec k parabole.



**Obr. 31:** Světlo vržené baterkou na zeď vytváří elipsy a parabolu.

rabol a elips. Tento postup však závisí na tom, že přijmeme koncept bodu umístěného v nekonečnu.

Jedním z pionýrů projektivní geometrie byl Gérard Desargues, francouzský architekt 17. století. Použil nekonečně vzdáleného bodu k důkazu celé řady důležitých nových teorémů, ale jeho kolegové nedokázali porozumět jeho terminologii a došli k závěru, že Desargues je blázen. Několik matematiků, jako například Blaise Pascal, se sice s Desarguovou prací seznámili, ale ta byla přesto zapomenuta.

Jeana Victora Ponceleta proto práce jeho předchůdců nijak neovlivnily. Coby Mongeův student se seznámil s technikou promítání do dvou rovin a jako válečný zajatec měl hodně volného času. Pobytu ve vězení pak využil k znovuobjevení myšlenky nekonečně vzdáleného bodu a spolu s Mongem se stal prvním opravdovým projektivním geometrem. Po svém návratu z Ruska (přivezl si také ruský abakus-sčot, v té době už archaickou zvláštnost) dokázal novou disciplínu přivést na vysokou úroveň.[9]

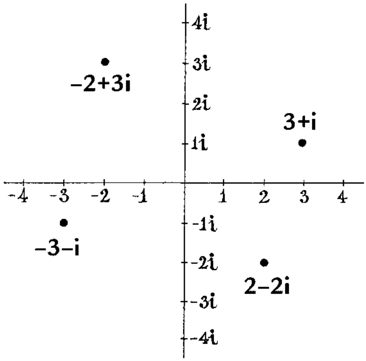
Poncelet neměl tušení, že projektivní geometrie odhalí tajemnou povahu nuly. Bylo totiž třeba ještě jednoho významného kroku vpřed, objevu komplexní roviny. Pro tento střípek skládačky se musíme obrátit do Německa.

Carl Friedrich Gauss se narodil v roce 1777 a byl jedním z německých zázračných dětí. Svoji matematickou kariéru začal výzkumem imaginárních čísel. Tématem jeho disertační práce byl důkaz základního algebraického teorému – tedy důkaz, že polynom (mnohočlen) $n$-tého stupně má právě $n$ kořenů. Toto tvrzení však platí pouze tehdy, počítáme-li s reálnými i imaginárními čísly.

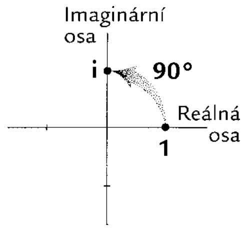
V průběhu svého života pracoval Gauss na neuvěřitelném množství témat – jeho práce o teorii křivých ploch se například stala klíčovou částí Einsteinovy teorie relativity. Gaussův způsob znázorňování komplexních čísel pak odhalil zcela novou matematickou strukturu.

Ve 30. letech 19. století si Gauss uvědomil, že každé komplexní číslo – tj. číslo, které má reálnou a imaginární část, například $1 - 2i$, je možné zobrazit v kartézské rovině, tj. v pravoúhlé soustavě souřadnic.Vodorovná osa představuje reálnou část komplexního čísla, zatímco svis-

[9] Ponceletova projektivní geometrie přinesla jeden z nejpodivnějších matematických pojmů vůbec: princip *duality*. Ve škole jsme se učili, že přímka je určena dvěma body. Ale přijmeme-li myšlenku bodu v nekonečnu, každé dvě přímky také vždy určují bod – svůj průsečík. Body a přímky jsou tedy navzájem *duální*. Každý teorém v eukleidovské geometrii je možné v projektivní geometrii *dualizovat*, tedy sestavit soustavu nových vět, které v paralelním světě projektivní geometrie odpovídají původním teorémům.



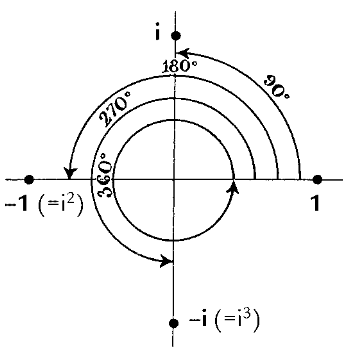

**Obr. 32:** Komplexní rovina.




**Obr. 33:** Číslo *i* je otočené o 90 stupňů.

lá osa část imaginární (obrázek 32). Tato jednoduchá konstrukce nazývaná komplexní rovina odhaluje o číslech mnohé. Vezměme si jako příklad číslo *i*. Úhel, který svírá *i* s osou *x*, je 90 stupňů (obrázek 33).

Co se stane, jestliže *i* umocníme na druhou? Podle definice platí, že $i^2 = -1$, což je bod, jehož úhel od osy *x* je 180 stupňů (bod opět leží přímo na ose *x*). Úhel se tedy zdvojnásobil. Číslo $i^3$ je rovno $-i$ a leží na ose, které s osou x svírá úhel 270 stupňů. Číslo $i^4 = 1$; dostali jsme se po 360 stupních zase zpět na původní místo, původní úhel jsme přitom přidali přesně 4krát (viz obrázek 34).

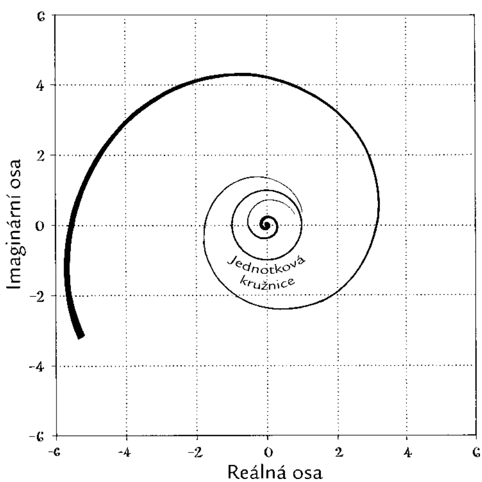



**Obr. 34:** Různé mocniny čísla *i*.

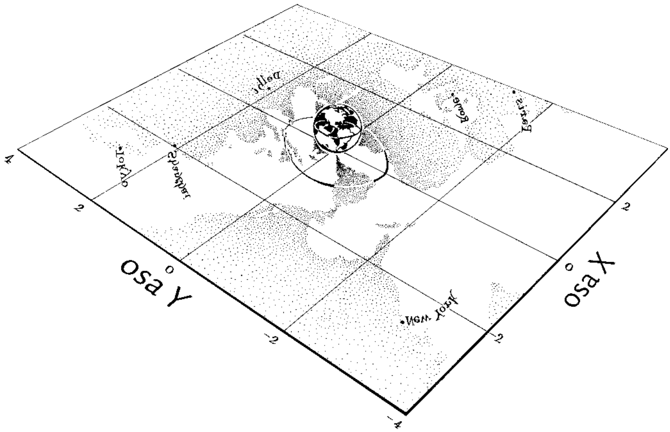
Není to souhra náhod. Vezměme jakékoli komplexní číslo a změřme jeho úhel. Zjistíme, že umocněním čísla na *n*tou se jeho úhel zvětší *n*krát. A se zvyšováním mocniny bude číslo opisovat spirálu zatočenou dovnitř nebo ven, podle toho, zda je číslo uvnitř nebo vně jednotkového kruhu (jednotkový kruh má střed v počátku souřadnic a poloměr 1 – obrázek 35). Násobení a umocňování se v komplexní rovině stalo geometrickou operací. Můžeme doslova vidět, jakým způsobem probíhá. Taková názornost představovala druhou velkou výhodu.

Mužem, který zkombinoval obě dvě nové myšlenky, byl Gaussův student Georg Friedrich Bernhard Riemann. Riemann spojil projektivní geometrii s komplexními čísly. Najednou se přímky staly kružnicemi a kružnice přímkami a nula a nekonečno se proměnily v póly glóbu plného čísel.

Riemann si představil průsvitnou zeměkouli ležící na komplexní rovině. Jižním pólem se koule dotýkala nuly.



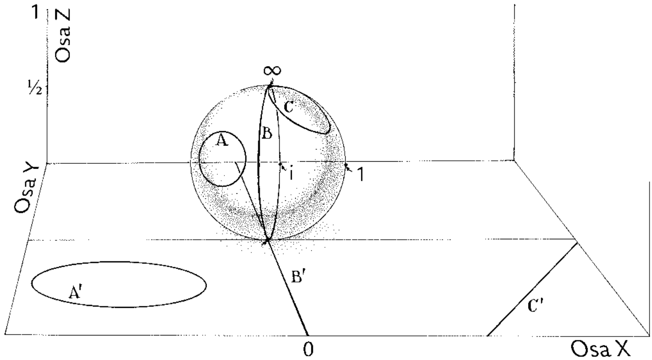

**Obr. 35:** Spirály uvnitř a vně jednotkové kružnice.




**Obr. 36:** Stereografická projekce zemského glóbu.

Kdyby se na severním pólu rozzářilo malé světélko, jakékoliv tvary nakreslené na kouli, by vrhaly stíny na spodní plochu. Stín rovníku by byl kružnicí se středem v počátku soustavy souřadnic. Stín jižní polokoule leží uvnitř tohoto kruhu a stín severní polokoule se nachází mimo něj (obrázek 36). Počátek (nula) odpovídá jižnímu pólu. Každý bod na kouli vrhá stín do komplexní roviny; v jistém smyslu je každý bod koule ekvivalentním ke svému stínu na ploše – a naopak. Každý kruh na ploše je stínem kruhu na kouli a kruh na kouli odpovídá kruhu na ploše… s jednou výjimkou. Kdybychom měli kruh, který prochází severním pólem koule, jeho stínem by už nebyla kružnice. Výsledkem je v tomto případě přímka. Severní pól je bod v nekonečnu, který si představovali Kepler i Poncelet. Přímky na ploše odpovídají na kouli kružnicím, které procházejí severním pólem – bodem v nekonečnu (obrázek 37).

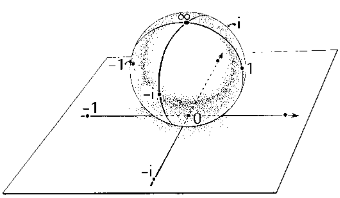
Jakmile Riemann zjistil, že komplexní plocha (s nekonečně vzdáleným bodem) je totožná s koulí, matematiko-



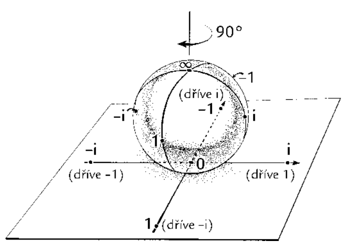

**Obr. 37:** Přímky na ploše odpovídají na kouli kružnicím.

vé mohli studovat násobení, dělení i jiné mnohem obtížnější operace prostě tak, že analyzovali způsoby, jimiž se koule deformuje a rotuje. Například násobení číslem *i* je ekvivalentní k otočení koule ve směru hodinových ručiček o 90 stupňů. Vezmeme-li číslo *x* a nahradíme je výrazem *(x − 1) / (x + 1)*, odpovídá to otočení celé koule o 90 stupňů, takže severní a jižní póly nyní leží na rovníku (obrázky 38, 39, 40).

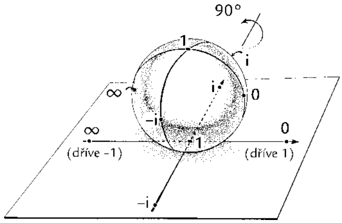
Nejzajímavější věci se začnou dít, vezmeme-li číslo *x* a nahradíme je jeho převrácenou hodnotou *1/x* – výsledkem této operace je zrcadlový obraz koule otočené vzhůru nohama. Severní pól se stane jižním a jižní pól se-




**Obr. 38:** Riemannova koule.




**Obr. 39:** Riemannova koule po vynásobení číslem *i*.

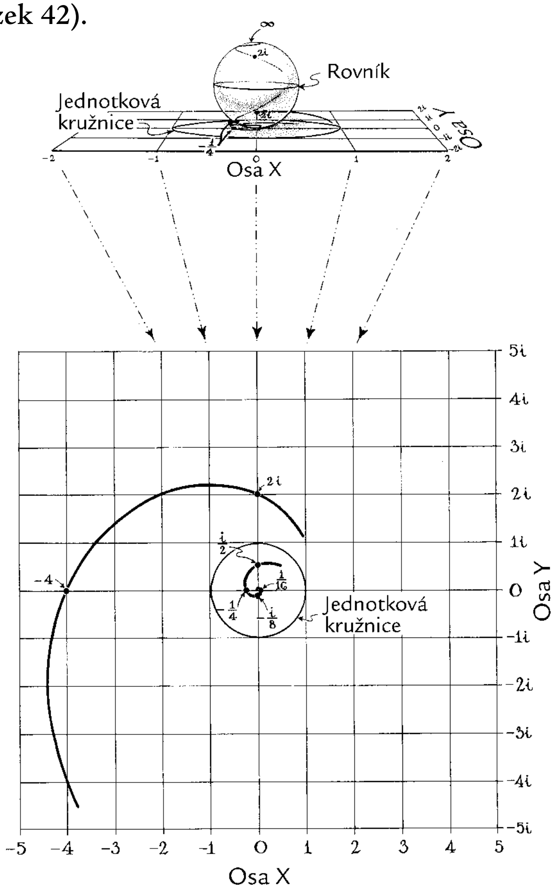



**Obr. 40:** Riemannova koule transformovaná výrazem $(x-1)/(x+1)$.

verním pólem: nula se stane nekonečnem a nekonečno se změní v nulu. Tyto proměny jsou založeny na geometrii koule; $1/0=\infty$ a $1/\infty=0$. Nekonečno a nula jsou jednoduše opačné póly na Riemannově kouli a mohou si v mžiku vyměnit pozice. Mají současně stejnou i opačnou moc.

Vezměme všechna čísla v komplexní rovině a vynásobme je dvěma. To představuje tutéž operaci, jako když položíme ruce na jižní pól a stahujeme gumový obal, který pokrývá kouli, směrem od jižního pólu směrem k severnímu. Násobení jednou polovinou má opačný efekt. Je to jako tažení obalu koule ze severního pólu směrem k jižnímu. Násobení nekonečnem je jako propíchnutí jižního pólu jehlou: gumová fólie je odmrštěna směrem k severnímu pólu – cokoliv násobeno nekonečnem je nekonečno. Násobení nulou je pro změnu zase jako píchnutí jehlou do severního pólu – všechno se obrátí v nulu: cokoli násobeno nulou je nula. Nekonečno a nula jsou stejné i opačné zároveň – a jsou také stejně destruktivní.

Nula a nekonečno setrvávají ve věčném boji, jehož cílem je pohlcení všech ostatních čísel. Jako manichejská noční můra sedí na opačných pólech číselné koule a vtahují čísla do miniaturních černých děr. Vezměme si jakékoli číslo na ploše. Argumentaci budeme sledovat třeba na osudu čísla $i/2$; umocníme jej nejprve na druhou, pak na třetí, na čtvrtou, na pátou, na šestou. Pokračujme v umocňování. Číslo se postupně spirálovitě stáčí směrem k 0, stejně jako když víří voda v odtoku vany. Co se naproti tomu stane s číslem 2*i*? Přesný opak. Umocníme jej opět nejprve na druhou, pak na třetí, na čtvrtou, na pátou. Spirála se stáčí ven (obrázek 41). Na číselné kouli je však jedna křivka duplikátem té druhé, jejím zrcadlovým obrazem (obrázek 42).




**Obr. 41:** Spirály, které se v rovině stáčejí dovnitř nebo naopak „rozmotávají“ ven.