

NOVÁ INFINITNÍ MATEMATIKA

KAROLINUM



**I.
Velká iluze
matematiky
20. století**

PETR VOPĚNKA

Nová infinitní matematika
I. Velká iluze matematiky 20. století

Petr Vopěnka

Vydala Univerzita Karlova v Praze
Nakladatelství Karolinum
www.cupress.cuni.cz
Redakce Lenka Ščerbaničová
Obálka Jan Šerých
Sazba Šárka Voráčková
Vydání první

© Univerzita Karlova v Praze, 2015
© Petr Vopěnka – dědicové, 2015

ISBN 978-80-246-2987-2
ISBN 978-80-246-3221-6 (online : pdf)



Univerzita Karlova v Praze
Nakladatelství Karolinum 2016

www.karolinum.cz
ebooks@karolinum.cz

Obsah

Několik slov o obsahu a zpracování tohoto spisu

9

Teologické základy Cantorovy teorie množin

1. Potenciální a aktuální nekonečno	13
1.1 Aurelius Augustinus (354–430)	14
1.2 Tomáš Akvinský (1225–1274)	14
1.3 Giordano Bruno (1548–1600)	16
1.4 Galileo Galilei (1564–1654)	19
1.5 Odmítnutí aktuálního nekonečna	20
1.6 Infinitesimální počet	23
1.7 Magie čísel	24
1.8 Jean le Rond d’Alembert (1717–1783)	26
2. Disputace o nekonečnu v barokní Praze	29
2.1 Rodrigo de Arriaga (1592–1667)	29
2.2 Františkánská škola	34
3. Bernard Bolzano (1781–1848)	37
3.1 Pravda o sobě	37
3.2 Aktuálně nekonečné množství	39
3.3 Paradox nekonečna	41
3.4 Relační struktury na nekonečném množství	43
4. Georg Cantor (1845–1918)	45
4.1 Transfinitní ordinální čísla	45
4.2 Aktuální nekonečno	46
4.3 Odmítnutí Cantorovy teorie	47

Rozmach Cantorovy teorie množin

5. Základní pojmy Cantorovy teorie množin	57
5.1 Relace a funkce	60
5.2 Uspořádání	62
5.3 Dobrá uspořádání	63
6. Ordinalní čísla	67
7. Postuláty Cantorovy teorie množin	69
7.1 Kardinální čísla	70
7.2 Postulát potenční množiny	72
7.3 Postulát dobrého uspořádání	75
7.4 Námítky francouzských matematiků vůči Cantorovým postulátům	77
8. Velké mohutnosti	81
8.1 Počáteční ordinalní čísla	81
8.2 Zornovo lemma	83
9. Podněty usměrňující vývoj Cantorovy teorie množin	85
9.1 Kolonizace infinitní matematiky	85
9.2 Korpusy množin	89
9.3 Vstup matematického formalismu do teorie množin	90

Vrchol a pád

10. Ultrafiltry	97
11. Měřitelná kardinální čísla	99
12. Formalizace jazyka teorie množin	103
13. Ultraprodukt přes pokrývací strukturu	105
14. Rozmanitost oborů všech množin	109
14.1 Ultraextenze oboru všech množin	109
14.2 Operátor ultraextenze	111
14.3 Rozšíření působnosti operátoru ultraextenze	112
14.4 Množina všech přirozených čísel neexistuje	113
14.5 Rozšířitelné obory množin	114
14.6 Problém nekonečna	119
Summary	121
Seznam značení	123
Literatura	125

A řekli: „Nuže vybudujme si město a věž, jejíž vrchol bude v nebi. Tak si zajistíme, abychom nebyli rozptýleni po celé zemi.“ I sestoupil Hospodin, aby viděl město a věž, které budovali synové lidští. Řekl totiž Hospodin: „Hle jsou jeden lid a mají všichni jednu řeč. A toto je začátek jejich díla. Teď nebudou chtít ustoupit od ničeho, co si usmyslí provést. Nuže sestoupíme a zmateme tam jejich řeč, aby si vzájemně nerozuměli.“ I rozebral je Hospodin po celé zemi a upustili od budování města.

Gn 11, 4–8

Několik slov o obsahu a zpracování tohoto spisu

Podnět k napsání těchto čtyř (s Prolegomeny pěti) útlých knih o nové infinitní matematice vzešel od Miroslava Holečka, ředitele Ústavu nových technologií na Západočeské univerzitě v Plzni. V jím pořádaných teoretických seminářích pak moje práce na těchto knihách nacházela porozumění a podporu.

Z množství nejrůznějších poznatků týkajících se nové infinitní matematiky jsem k uveřejnění vybral následující čtyři tematické okruhy.

V knize *Velká iluze matematiky 20. století* je zdůvodněna a dokumentována nezbytnost vypracování nové infinitní matematiky. V knize *Nová teorie množin a polomnožin* je studováno nekonečno ukazující se na neostře vymezených množstvích. Kniha *Reálná čísla a jejich diskretizace* je věnována rozmístění nekonečně malých čísel na číselné ose a operacím prováděným s těmito čísly. Ve čtvrté knize *Staronový diferenciální počet*, jak samotný její název vypovídá, je obsažena úplná rehabilitace původního Leibnizova diferenciálního počtu. Aby tuto knihu bylo možno číst samostatně, jsou na jejím začátku uvedeny jen nezbytné pojmy a vlastnosti týkající se nekonečně malých čísel. Podobné zpracování integrálního počtu by si vyžádalo znalost některých dalších poznatků uvedených v předcházející třetí knize.

Bez obětavé pomoci mnohých mých kolegů a kolegů by tento spis jen stěží mohl vzniknout. Především Marie Větrovcová působící na katedře filozofie Západočeské univerzity zpracovala z mých rukopisů Prolegomena, druhou, třetí a čtvrtou knihu. Ondřej Chvojka opravil některé chyby v mých výpočtech obsažených ve čtvrté knize.

Mnoho věcných připomínek jsem obdržel od Aleny Vencovské působící na univerzitách ve Velké Británii. V neposlední řadě zajímavé (většinou do tohoto spisu nezařazené) podněty z fyziky mi poskytl Miroslav Holeček. Všem zde jmenovaným a mnoha dalším patří můj dík.

Petr Vopěnka

TEOLOGICKÉ ZÁKLADY
CANTOROVY TEORIE MNOŽIN

1. Potenciální a aktuální nekonečno

K zúžení a vyhocení pojmu nekonečna došlo již někdy při prvních střetech křesťanské teologie s antickou vědou. Tehdy byly potlačovány ty významy tohoto pojmu, které poukazují na neurčitost, neuchopitelnost a nejistotu. Novověká věda – spolu s vlivnými částmi filosofie a teologie, jež jsou s ní svázány – pak od takových významů pojem nekonečna zcela očistila. Proto i my (pokud nebude řečeno jinak) budeme nyní názvem nekonečno označovat pouze nekonečno opatřené klasickým výkladem; tedy to nekonečno, které je ve vědeckých kruzích s tímto názvem dodnes spojováno.

K našemu prvotnímu setkání s takto vykládaným nekonečnem dochází u ostře vymezených nekonečných dění, to znamená při čerpání nějakých stálých, přesně určených, leč nevyčerpatelných možností. Tak je tomu při opakovaném přičítání jedničky k nějakému číslu, při opakovaném prodlužování úsečky o danou délku v klasickém geometrickém prostoru a podobně. Tato podoba nekonečna obdržela název **nekonečno potenciální**. Na takovéto dění má totiž nekonečno vliv, těchto dění se zmocnilo, jemu tato dění podléhají. Naproti tomu **aktuálním nekonečnem** rozumíme tu podobu jevu nekonečna, která se ukazuje na díle vytvořeném vyčerpáním všech příslušných nevyčerpatelných možností. Tak například řekneme-li, že posloupnost přirozených čísel 1, 2, 3, ... je potenciálně nekonečná, pak tím rozumíme, že vytvořeno je vždy jen konečně mnoho těchto čísel, avšak vždy lze vytvořit nějaká další. Řekneme-li, že je tato posloupnost aktuálně nekonečná, pak tím rozumíme, že všechna přirozená čísla jsou již vytvořena (a žádná další tedy již vytvořit nelze). Podobně je i zmíněné prodlužování úsečky potenciálně nekonečné; dílo, jež po všech těchto prodlužováních vznikne, již není úsečka, ale přímka (popřípadě polopřímka), na níž se již nekonečno ovládající toto dílo projevuje ve své vítězné, aktuální podobě.

Již v samotném vymezení aktuálního nekonečna je až příliš nápadný protimluv. Požaduje se, aby to, co je nevyčerpatelné, bylo vyčerpáno, aby neukončitelné dospělo ke svému konci, tedy vlastně aby se to, co je nekonečné, v jistém smyslu stalo zároveň konečným. Přesto aktuální nekonečno nebylo všeobecně zavrženo jakožto pojem logicky sporný a z pouhého čistého rozumu nepřijatelný, ale čas od času se vkrádalo do úvah některých myslitelů.

Novověká evropská věda ovšem přílišnou důvěrou v aktuální nekonečno nehýřila a jak jen mohla, snažila se ho – více či méně úspěšně – obejít prostřednictvím nekonečna potenciálního, jehož klasický výklad byl všeobecně přijímán.

V neodbytné naléhavosti se však problém aktuálního nekonečna ohlašoval téměř neustále v souvislosti s výklady křesťanského Boha. Problém aktuálního nekonečna tak byl – a vlastně dodnes je – především problémem teologickým, i když od poloviny devatenáctého století si novověká matematika přisvojila, upravila a do sebe vstřebala tu část teologie, která se kolem něj vytvořila. Dříve však, než k tomu došlo, potýkalo se s tímto problémem evropské myšlení velmi usilovně. Na některé významné mezníky zmíněné potýčky upozorníme v kapitole, kterou právě otevíráme.

1.1 Aurelius Augustinus (354–430)

Mezi mysliteli, kteří vynesli křesťanského Boha do závratných výšek nad všechny sebedokonalejší pohanské bohy, zaujímá přední místo **sv. Augustin**. Byl to právě on, kdo pro velikost a slávu velebného Božího majestátu pohlédl do bezedné hlubiny absolutního nekonečna a rozhodl v Boží prospěch zápas křesťanského Boha s touto vše pohlcující a nad vším stvořením vítězí hlubinou. Učinil tak především v osmnácté kapitole dvanácté knihy svého proslulého spisu *De civitate Dei*, nesoucí příznačný název „Proti těm, kteří praví, že každá nekonečnost ani Božskou vědoucností nemůže být obsažena“. Z ní na ukázkou uvedeme následující úryvek v překladu Františka Ladislava Čelakovského z roku 1831.¹ Pro lepší porozumění následujícím Augustinovým slovům ještě poznamenejme, že počtem je většinou míněno množství přirozených čísel od jednotky až do nějakého daného přirozeného čísla.

Co se též druhé stránky řeči jejich týče, že totiž, co neskončeno jest, ani vševědoucností obsáhnouti se nedá: nezbyvá ničeho, než aby ještě drze doložili, pohřizující se právě v nejhlubší propast bezbožnosti, že Bohu ani všichni početové známí nejsou. Vímeť jistotně, že počtům konce není; neboť při jakémkoliv počtu bychom mysleli u konce býti, vždy tentýž počet, něku-li přidáním jedničky dá se zmnožiti, brž ať by sebe větší byl, a jakékoliv množství obsahoval v sobě, tímže způsobem podle počtářského umění, nejenom zdvojnásoben může býti, ale i zmnohonásoben. Jednak ale každý počet svými vlastnostmi tak jest uzavřen, že vždy lišiti se musí jeden od druhého. Jsou tedy vespolek nestejní a rozdílní; každý pak počet pro sebe jest konečný, všichni ale vůbec jsou nekoneční. Čiližby pro tuto neskončenost nevěděl Bůh o všech počtech, a kdyby vědoucnost Božská k jisté přišla veličině počtu, zdaliby ostatní tajní zůstávali před ní?

1.2 Tomáš Akvinský (1225–1274)

Velký učitel církve **sv. Tomáš Akvinský** se zabýval vztahem Boha a nekonečna především v souvislosti s Boží mocí. Tento snad vůbec nejvlivnější teolog totiž sevřel Boží moc do nutností z rozumu a tím, aniž by to byl ochoten připustit, podřídil Boha rozumu. Toto ústrojně zapojení Boha do lidmi vyhledávaného a rovněž rozumem ovládaného řádu reálného světa sice významně podnítilo a živilo rozvoj novověké evropské přírodovědy a vůbec vědy, zároveň jí však vydalo Boha napospas.

Omezení Boží moci odůvodňoval sv. Tomáš Akvinský tím, že Bůh má toliko činné možnosti, a tedy činnou moc (a v tomto smyslu je všemohoucí), a nikoliv možnosti trpné, a tedy trpnou moc, neboť Bůh je čiré bytí. Přitom trpnou možností

¹Augustin (413–426), *De civitate Dei* (O Boží obci), cit. podle sv. Augustin (1829), *O městě Božím kněž dvamecítma*, překl. F. L. Čelakovský, díl III, s. 107.

něčeho je – poněkud volně řečeno – být něčím, čím by to sice mohlo být, ale ze své podstaty již být nemůže. Tak například jestliže nějaký pták vzlétl, pak sice měl možnost nevzlétnout, avšak jestliže již vzlétl, pak tuto možnost ztratil; není to již jeho možnost činná, uskutečnitelná, ale pouze trpná.

V článku nesoucím název „Zda Bůh může učiniti, aby nebylo minulých“, nacházejícím se v prvním dílu *Theologické summy*, sv. Tomáš Akvinský zcela otevřeně říká:²

Musí se říci, že pod všemohoucnost Boží nespadá, co obsahuje odporování. Ale obsahuje odporování, že nebylo minulých. Neboť jako obsahuje odporování, že Sokrates sedí a nesedí, tak že seděl a neseděl. [...] Tedy nepodléhá Boží všemohoucnosti, že nebyla minulá . . . A tak jest více nemožné než vzkřísiti mrtvého, což neobsahuje odporování, jsouc nazváno nemožným podle nějaké moci, totiž přírodní. Neboť taková nemožná jsou poddána Boží všemohoucnosti.

Stručně shrnuto, Boží moc vůči reálnému světu, to znamená vůči stvořeným jsoucnům a idejím do tohoto světa vtištěným, je omezena zákonem logického sporu a pouze jím. Hranicí Boží moci jsou tedy pouze nutnosti z čistého rozumu.

V době, kdy se celý svět nacházel uvnitř křišťálové plochy kulové, nebylo obtížné nabýt přesvědčení, že v takto vytvořeném světě se aktuální nekonečno nevyskytuje. Podobně ani žádný soudný člověk nebude zajisté nic namítat proti tomu, že žádná stvořená bytost není schopna aktuální nekonečno nazírat. Očekávanou námitku, že alespoň mezi jevy ideálními lze aktuální nekonečno objevit, jmenovitě že tomu tak je ve vědách matematických, neboť geometři občas říkají „vezměme tuto nekonečnou čáru“, odbývá sv. Tomáš Akvinský v prvním dílu *Theologické summy* následujícím způsobem:

Musí se říci, že geometrie nemusí mysliti, že by nějaká čára byla nekonečná v uskutečnění, nýbrž musí vzíti nějakou čáru v uskutečnění zakončenou, od níž by se mohlo ubrati, kolik je třeba; a tu nazývá čarou nekonečnou.

Jinými slovy, geometrie se nemusí plést do Božího hájemství, jímž je aktuální nekonečno; nemá k tomu žádný důvod. Ostatně, tak daleko ani žádný geometr nedohlédne.

Avšak na druhé straně se především právě při pěstování matematiky s nekonečnem často setkáváme, byť jen v jeho potenciální podobě. O tom se Tomáš Akvinský krátce zmiňuje při rozebírání sedmé otázky třetího dílu *Theologické summy*, když píše:

Musí se říci, že mluvíme-li o velikostech matematických, ke každé konečné velikosti lze něco přidat, protože se strany konečné velikosti není nic, co by přidání odporovalo. Mluvíme-li však o velikosti přírodní, tak může

²Tomáš Akvinský (1937–1940), *Theologická summa*, překl. P. Soukup, Otázka 25, 4, s. 252.

nastat odpor se strany tvaru [...]. A odtud jest, že nelze nic přidati velikosti celého nebe [rozumí se patrně oblohy, to je oné křišťálové plochy kulové].

Těmito slovy sv. Tomáš Akvinský nepřímou naznačuje, že právě při pěstování věd matematických se prostřednictvím rozumu můžeme dotknout – ovšem jen toliko nesměle – velikosti Boží. A také naopak, jak praví **Boethius** (480–524), vědění o věcech Božských nemůže získat nikdo takový, kdo by byl úplně prost matematického výcviku.

Tím, že sv. Tomáš Akvinský odňal reálnému světu aktuální nekonečno a právo obcovat s ním přiznal pouze Bohu, kdežto bytostem stvořeným ho odepřel, problém aktuálního nekonečna značně zjednodušil. Převedel ho totiž do výlučné působnosti Boží a tím umožnil hledat i taková jeho řešení, která se vymykají lidským rozumovým poznávacím schopnostem. Šlo tedy již jen o to, zda Bůh vskutku může aktuální nekonečno poznávat, to znamená naznačit, jak ho poznává, aby se přitom vyhnul sporu obsaženému v samotném pojmu aktuálního nekonečna, jenž se v něm objeví tehdy, když k němu přistupujeme od nekonečna potenciálního. Jinými slovy je třeba ukázat, jak nanejvýše svrchovaný křesťanský Bůh aktuální nekonečno přemáhá. K tomu účelu je užitečné uvědomit si rozdíly mezi rozumovou poznávací schopností Boží a lidskou. Na ně pak poukazuje sv. Tomáš Akvinský v první knize *Summy proti pohanům*³, kde píše:

Lidský intelekt nepoznává nekonečné tak, jako intelekt Boží. Náš intelekt se totiž odlišuje od Božího intelektu ze čtyř důvodů: První je to, že náš intelekt je konečný, kdežto Boží nekonečný. Druhý je to, že poznává-li náš intelekt různými podobami, nemůže jít do nekonečna dle jediného poznání jako intelekt Boží. Třetí plyne z toho, že náš intelekt poznávající různě skrze různé podoby, nemůže současně poznat mnohé, a tak nemůže poznat nekonečna, leda postupně jejich počítáním; to však není v Božím intelektu, jenž současně nazírá mnohá, viděná jakoby skrze jednu podobu. Čtvrtý je to, že Boží intelekt poznává to, co je, i to, co není, jak bylo prokázáno [v jedné z předcházejících kapitol *Summy proti pohanům*].

1.3 Giordano Bruno (1548–1600)

Tři dialogy o aktuálním nekonečnu v reálném světě obsahuje útlá knížka *De l'infinito universo et Mondi* (Nekonečné univerzum a svět), kterou v roce 1584 vydal v Benátkách **Giordano Bruno**. V nich tento vzdělaný dominikán postupně odhaluje slabiny v učení svého proslulého předchůdce a řádového spolubratra sv. Tomáše Akvinského (v té době již svatého a prohlášeného za církevního učitele) o tom, že ve věcech stvořených aktuální nekonečno býti nemůže. Vědom si toho, že Tomášův výklad

³Thomas Aquinas (asi 1270), *Summa contra Gentiles*, cit. podle Akvinský, T. (1992–1993), *Summa proti pohanům*, sv. I.

omezují projevy Boží moci a tím i Boží moc jako takovou, otevírá Giordano Bruno touto knížkou aktuálnímu nekonečnu vstup dokonce do materiální složky reálného světa.

Protože Tomášovy důkazy o nemožnosti aktuálního nekonečna v reálném světě jsou téměř doslova převzaté od **Aristotela**, útočí Giordano Bruno proti němu, kdežto o Tomášovi se z opatrnosti raději vůbec nezmiňuje. To mu však stejně nebylo nic platné.

Na rozdíl od sv. Tomáše Akvinského učinil již Giordano Bruno s plným vědomím onen osudový krok novověké přírodovědy spočívající ve vložení reálného světa do klasického geometrického prostoru. Tento krok byl natolik podmanivý, že až do doby Riemannovy geometrie, to je až do poloviny devatenáctého století, byl nevratný.

Podle Aristotela totiž reálný prostor sahá až k oné křišťálové ploše kulové poseté stálicemi. Za ní již žádné místo není. Tato plocha kulová je hranicí reálného světa a je jeho místem. Kdyby nebyla, nezbylo by po ní žádné místo.

Směšně malé dílko, jakým by byl reálný svět Aristotelův a sv. Tomáše Akvinského, by však nejen neodpovídalo nekonečné Boží dobrotě, ale neodráželo by ani nekonečnou Boží velebnost, a hlavně – nebylo by hodno nekonečné Boží moci, jež se ve své nedostizitelné velikosti může projevit vlastně jen aktuálně nekonečným činem. Na tyto důvody svědčící ve prospěch aktuálně nekonečného množství různých sluncí a planet ve vesmíru, z nichž mnohé se ukazují na noční obloze jako hvězdy, upozorňuje Giordano Bruno následujícími slovy:⁴

Přítomnost nekonečné velebnosti se představuje nesrovnatelně lépe v nesčíslných individuích nežli tam, kde jsou spočítatelná, kde jsou v omezeném počtu. Nepřístupná Boží tvář se musí zrcadlit v nekonečném obrazu, v němž jsou jako nesčíslné údy světy [rozumí se slunce a planety] tak bezpočetné, jak ty druhé světy [rozumí se odlišné od našeho Slunce a naší Země] opravdu jsou. Z téhož důvodu, že jsou nesčíslné stupně dokonalosti, jež musí rozvíjeti netělesnou velebnost Boží způsobem tělesným, musí existovati nesčíslná individua, jakými jsou tato velká tělesa (z nichž jedním je Země, naše Božská matka, která nás zrodila a živí a která se o to již znovu nepokusí). Nekonečný prostor je potřebný k tomu, aby do sebe pojal jejich množství bez počtu. Jako mohlo býti, může být a je dobré, že existuje tento svět [rozumí se Země a život na ní], tak rovným právem je dobré, aby vskutku byly, netoliko mohly být nesčíslné světy tomuto podobné [...]

Proč bychom měli a mohli tvrdit, že Boží dobrotivost, jež se může sdělovati nekonečnému množství věcí a rozlévati se do nekonečna, by chtěla býti lakomá a stáhnouti se do nicoty, protože vše konečné je nicotou v poměru k nekonečnu? Proč chcete, aby tento střed Božství, jenž se může bez konců rozšířiti v podobě nekonečné koule (lze-li to tak vyjádřit), zůstával, jako by byl nepřející, spíše neplodný, než aby se sděloval jako tvůrčí otec, velebný a krásný? Proč by se měl sdělovat menší

⁴Giordano Bruno (1956), *Dialogy*, překl. J. B. Kozák.

měrou nebo, abych to lépe vyjádřil, vůbec se nesděloval, spíše než aby byl podle povahy své veliké potence vším? Proč by měla nekonečná tvůrčí schopnost býti zbytečná, býti připravena o možnost existence nescíslných možných světů? Proč by měla být ztlumena závažnost Božího obrazu, který by se přece musel zaskvěti v nezmenšeném zrcadle a svým způsobem nekonečným, vesmírným? Proč bychom měli tvrdit něco, co působí takové nesrovnalosti a ničí tolik principů filosofie, aniž to jakýmkoliv způsobem prospívá zákonům, víře nebo mravnosti? Jak chceš, aby Bůh byl omezen co do potence i co do činnosti a účinků [...]

Giordano Bruno však pouze neupozorňoval na to, že konečně velký reálný svět v nekonečném prostoru by neodpovídal Boží dobrotě, velebnosti a moci, ale následujícími slovy dal jasně najevo, že o Bohu, jenž by se neprojevil aktuálně nekonečným dílem, lze pochybovat, zda se takto vůbec může projevit; jinými slovy, zda jeho tvůrčí moc není aktuálním nekonečnem omezena.

Ze všech těch důvodů tedy, z nichž se může o tomto našem světě, je-li pojat jako konečný, říci, že je vhodný, dobrý, nutný, musí se říci o všech ostatních nespočetných světech, že jsou vhodné a dobré; z týchž důvodů jim všemohoucnost neodpírá existenci. A neuznáme-li je, mohlo by se jí vytýkat, že nechtěla nebo nemohla a že pak ponechala prázdno (nebo, nechceš-li použít slova prázdno, nekonečný prostor); byla by tím netoliko umenšena nekonečná dokonalost jsoucná, ale také nezměrná majestátnost účinné příčiny ve věcech stvořených, jsou-li stvořeny, popřípadě ve věcech závislých, jsou-li věčné. Z jakého důvodu bychom měli věřit, že činitel, jenž může učinit nekonečně mnoho dobra, učinil je omezeným? A učinil-li je omezeným, proč bychom měli věřit, že má možnost učinit je nekonečným, když u něho možnost a uskutečňující činnost splývá v jedno?

Tomuto svému přesvědčení zůstal Giordano Bruno věrný až do smrti. Otevřeně se k němu přihlásil i při třetím výslechu před inkvizičním tribunálem v roce 1592, kde řekl:⁵

Existuje nekonečný vesmír, který je výsledkem nekonečné Boží moci, neboť považuji za věc nehodnou Boží dobroty a moci, aby Božstvo dalo vznik konečnému světu, když vedle tohoto světa mohlo dát vznik jinému a nekonečně mnoha jiným. Buďsi; prohlásil jsem, že je nekonečné množství jednotlivých světů, podobných tomuto světu naší Země, o níž se s Pythagorem domnívám, že je to hvězda, které se podobají Měsíc, jiné planety a jiné hvězdy, jichž je nekonečně mnoho, a že všechna tato nebeská tělesa jsou bezpočetné světy, které pak dohromady dávají nekonečnou vesmírnost v nekonečném prostoru; a tomu se říká nekonečný vesmír, v němž je světů bezpočtu. Tak je tedy dvojí nekonečnost [rozumí

⁵Giordano Bruno (1956), *Dialogy*, op. cit., s. 367.

se aktuální v reálném světě]: nekonečnost velikosti vesmíru a nekonečné množství světů; nepřímo z toho plyne odmítnutí pravdy podle víry.

„Protože setrval ve své zatvrzelosti nejen v tomto, ale i v jiných bludech, vysvobodili ho 16. února 1600 sluhové spravedlnosti ze žaláře svaté inkvizice a odvedli ho na náměstí Campo di Fiore v Římě, kde ho svlékli a připoutavše ho ke sloupu, zaživa ho s jazykem v kleštích upálili. Dva dominikáni a dva jezuité mu domlouvali až do poslední chvíle, aby se zřekl zatvrzelosti, v níž nakonec dokončil svůj ubohý nešťastný život“, jak je psáno ve zprávě bratrstva uťaté hlavy Jana Křtitele⁶ a v jiných zprávách z té doby. Na témže náměstí byl pak o tři roky později vyhlášen zákaz veškerých jeho knih a spisů.

1.4 Galileo Galilei (1564–1654)

V roce 1638 vyšlo v Holandsku jedno z posledních děl tehdy již proslulého průkopníka novověké evropské vědy **Galilea Galileiho**. Je jím spis *Discorsi e dimonstrazioni matematiche, intorno a due nuove scienze*, obsahující čtyři dialogy a krátký dodatek. Rozhovory v těchto dialozích mezi sebou vedou Salutiati, Sagredo a Simplicio. První z nich zastává názor Galileiův a poučuje oba zbývající, přičemž Simplicius je méně chápavý než Sagredo, takže Salutiati mu musí vše vykládat poněkud obsírněji.

Ačkoliv celá tato Galileiova kniha je neobyčejně podnětná, nás v tuto chvíli zajímá pouze krátký úryvek z prvního dialogu, zařazený do něj vlastně jen na dokreslení tam vyslovovaných názorů; když totiž Simplicio řekl, že na delší úsečce je více bodů než na kratší. Protože to, co zde Galilei předvedl, je dnes velmi často zkresleně vykládáno, uvedeme tento úryvek téměř v doslovném překladu.⁷

Salu. Náš intelekt je konečný, následkem čehož na vše myslíme tak, jako by to bylo konečné, a to i tehdy, když hovoříme o nekonečnu. To nám ovšem nepřináší žádný užitek, neboť přívlastky větší, menší, stejně velké nejsou na nekonečno použitelné. Jako příklad uvedu něco, co to panu Simpliciovi, jenž obtížně chápe, objasní. Předpokládám, že dokonale znáte, která čísla [rozumí se čísla přirozená] jsou čtverce a která nejsou.

Simpl. Ano znám. Čtverce jsou čísla, která vzniknou, vynásobíme-li nějaké číslo samo sebou. Takovými čísly jsou jedna, čtyři, devět, ... neboť je obdržíme, vynásobíme-li číslo jedna, dvě, tři, ... samo sebou.

Salu. Dobře; zajisté také víte, že číslo, z něž je čtverec vytvořen, se nazývá kořen nebo též strana tohoto čtverce. Čísla, která nevzniknou vynásobením nějakého čísla sama sebou, nejsou čtverce. Řeknu-li tedy, že všechna čísla obsahují mezi sebou všechny čtverce a je jich více než všech čtverců, bude to zajisté pravda. Že ano?

⁶Giordano Bruno (1956), *Dialogy*, op. cit., s. 407.

⁷Galileo Galilei (1638), *Discorsi e dimonstrazioni matematiche, intorno a due nuove scienze* (Matematické rozpravy a pokusy), Leiden: Louis Elsevier, překlad Flavio Scapini.

Simpl. Proti tomu nelze nic namítat.

Salu. Začnu-li počítat, kolik je čtverců, lze pravdivě odpovědět, že tolik, kolik je všech kořenů. Každý čtverec nemá více než jeden kořen. Žádný kořen pak nemůže mít více než jeden jemu příslušející čtverec.

Simpl. Tak tomu vskutku je.

Salu. Táži-li se, kolik je kořenů, nelze popřít, že jich je tolik jako všech čísel, neboť každé číslo je kořenem nějakého čtverce. A je-li tomu tak, pak lze říci, že též čtverců je tolik, kolik je všech čísel, neboť je jich tolik, kolik je kořenů, a těch zase tolik, kolik všech čísel. Přitom prve jsme řekli, že všech čísel je více než všech čtverců.

Sagr. Co z toho plyne?

Salu. To znamená, že nekonečně je jak všech čísel, tak i čtverců a kořenů. Není žádná veličina, která by zachytila počet čtverců a která by byla menší než ta, která by zachytila počet všech čísel. Přívlasky větší, menší, stejně velký nemají žádný smysl, pokud hovoříme o nekonečném.

Dnes bychom tedy řekli, že množinu všech čtverců přirozených čísel lze vzájemně jednoznačně zobrazit na množinu všech přirozených čísel a že tedy obě tyto množiny mají stejnou **mohutnost**. Galilei však žádný takový pojem neuvádí. Jeho úvaha má být výhradně jen odstrašujícím příkladem toho, do jakých nesnází a omylů bychom mohli zabřednout, kdybychom o nekonečnu hovořili v pojmech, které jsme si vytvořili pro veličiny konečné. Doporučuje, abychom o aktuálním nekonečnu raději vůbec nehovořili.

Jak je patrné, Galileiova rada je jednoznačná: Nekonečno ano, ale potenciální, neboť v takovém případě máme co činit aktuálně vždy jen s konečným, a tedy stojíme na pevné půdě. Úvahy o aktuálním nekonečnu jsou nebezpečné, neboť nemáme schopnost vytvořit si vhodné pojmy týkající se tohoto nekonečna, přičemž pojmy vytvořené při studiu jevů konečných nejsou na ně použitelné.

1.5 Odmítnutí aktuálního nekonečna

Z hlediska chladných záměrů novověké evropské vědy byl problém aktuálního nekonečna v nejlepším případě problémem okrajovým. Propast zející mezi člověkem a Bohem, vzniklá odbouráním barokní nadstavby reálného světa, ostře oddělila vědu od teologie, přičemž pro neuchopitelnost aktuálního nekonečna člověkem spadl tento problém téměř do výlučné působnosti teologie. Věda na něj pohlíží jako na záležitost nerozhodnutelnou, a tedy pro čínorodého Západoevropana nezajímavou. O tom, že aktuální nekonečno není přístupné ani lidskému rozumu, ba ani lidské vůli, se při probírání důsledků čtyřicátého devátého tvrzení ve druhém dílu svého spisu *Etika* (tedy při zkoumání otázek pro vědu naléhavějších) jen jaksi mimochodem zmiňuje **Benedikt Spinoza** (1632–1677).⁸

⁸Benedikt Spinoza (1977), *Etika*, překl. K. Hubka.