KAPITOLA 5

ZNALOSTI OBSAHU: DŮKLADNÉ POROZUMĚNÍ MATEMATICKÝM ZÁKLADŮM

Předchozí čtyři kapitoly vylíčily, jaké znalosti čtyř témat elementární matematiky mají američtí a čínští učitelé. Rozdíl ve znalostech těchto dvou zkoumaných skupin učitelů byl do očí bijící. Oněch 23 „nadprůměrných" amerických učitelů bylo zaměřeno spíše na proceduru. Většina z nich prokázala dobré algoritmické schopnosti ve dvou počátečních tématech, v odčítání a násobení celých čísel, měli však potíže s dvěma pokročilejšími tématy, s dělením zlomkem a s obvodem a obsahem obdélníku. I když 72 čínských učitelů pocházelo ze škol, jejichž kvalita byla v rozsahu od vynikajících po průměrné, většina z nich u všech čtyř témat předvedla jak algoritmické schopnosti, tak konceptuální porozumění. V této kapitole rozebereme znalosti učitelů napříč těmito konkrétními tématy.

Z celkového pohledu se jeví, že znalosti čínských učitelů jsou zřetelně ucelené, zatímco znalosti amerických učitelů jsou zřetelně roztříštěné. Přestože se čtyři témata v této studii nacházejí v různých úrovních a oblastech elementární matematiky, při rozhovorech s čínskými učiteli jsem vnímala vzájemné propojení mezi jejich rozbory jednotlivých témat. V odpovědích amerických učitelů však mezi těmito čtyřmi tématy nebyla vidět téměř žádná souvislost. Fragmentace znalostí amerických učitelů pozoruhodně odpovídá fragmentaci matematického kurikula a výuky ve Spojených státech, které i další výzkumníci považují za hlavní vysvětlení neuspokojivé výuky matematiky ve Spojených státech (Schmidt, McKnight, Raizen, 1997; Stevenson, Stigler, 1992). Z mého pohledu však tato roztříštěnost a ucelenost jsou důsledky, nikoli příčiny. Kurikula, výuka a znalosti učitelů odrážejí terén elementární matematiky ve Spojených státech a v Číně. Co způsobuje ucelenost znalostí čínských učitelů, je ve skutečnosti matematická podstata jejich znalostí.

OBRAZ ZNALOSTÍ ČÍNSKÝCH UČITELŮ NAPŘÍČ TÉMATY: CO TVOŘÍ JEJICH MATEMATICKOU PODSTATU?

Podívejme se na odpovědi čínských učitelů na otázky v rozhovorech z ptačí perspektivy. Odhalí to, že jejich rozbory měly některé společné rysy, které prostupovaly jejich matematickými znalostmi a které se jen vzácně, pokud vůbec, vyskytovaly v odpovědích amerických učitelů.

Najít matematické odůvodnění algoritmu

Čínští učitelé v rozhovorech na úvod svého rozboru algoritmu často citovali staré úsloví: „Vědět jak a také vědět proč." Když přejímali toto rčení, které povzbuzuje k hledání smyslu určité činnosti, dávali mu nový specifický význam – *vědět, jak provádět algoritmus, a vědět, proč to má smysl z hlediska matematiky*. Aritmetika zahrnuje různé algoritmy; vlastně se často soudí, že znát aritmetiku znamená tyto algoritmy ovládat. Z pohledu čínských učitelů však zdaleka nestačí znát jen soubor pravidel umožňujících vyřešit úlohu v konečném sledu kroků. Je třeba také vědět, proč ten sled kroků ve výpočtu dává smysl. V případě algoritmu odčítání s přeskupováním se většina amerických učitelů spokojila s rádoby vysvětlením „půjčování", zatímco čínští učitelé vysvětlovali, že logickým základem výpočtu je „rozkládání jednotky vyššího řádu".[46] U tématu násobení víceciferných čísel americkým učitelům stačilo pravidlo „zarovnávat

[46] Čínští učitelé při vyučování ve svém slovním výkladu obvykle používají matematické termíny. Často se používají termíny jako *sčítanec*, *součet*, *menšenec*, *menšitel*, *rozdíl*, *činitel*, *součin*, *částečný součin*, *dělitel*, *dělenec*, *podíl*, *inverzní operace* a *rozkládání*. Čínští učitelé například nevyjadřují součtovou verzi komutativního zákona jako „nezáleží na pořadí, v jakém sčítáte dvě čísla". Místo toho říkají, „když při sčítání dvou sčítanců zaměníme jejich pořadí ve výrazu, součet se nezmění".

s číslicí, kterou násobíme“, ale čínští učitelé rozebírali pojmy řádu a poziční číselné soustavy, aby vysvětlili, proč se částečné součiny při násobení nezarovnávají jako sčítance při sčítání. Američtí učitelé při výpočtu dělení zlomkem používali postup „převrátit a násobit“, ale čínští učitelé pro odůvodnění tohoto jakoby nahodilého algoritmu odkazovali na to, že „dělení číslem je ekvivalentní násobení jeho převrácenou hodnotou“.

Záliba v otázce „proč to dává smysl?“ je odrazovým můstkem ke konceptuálnímu porozumění matematice. Zkoumání matematického smyslu algoritmu navíc vedlo čínské učitele k závažnějším myšlenkám disciplíny. Například „rozkládání jednotky vyššího řádu“ jako odůvodnění odčítání s přeskupováním souvisí s myšlenkou „skládání jednotky vyššího řádu“, které je odůvodněním sčítání s přenosem. Další vyšetřování skládání a rozkládání jednotky vyššího řádu pak může vést k myšlence „míra pro sestavení a rozložení jednotky vyššího řádu“[47], což je základní myšlenka vyjadřování čísel. Podobně je pojem řádu číslice na daném místě spojen s hlubšími představami jako poziční číselná soustava a základní jednotka čísla. Zkoumáním „proč“ odůvodňujícího „jak“ se krok za krokem dostáváme k základním myšlenkám v jádru matematiky.

Odůvodnit vysvětlení symbolickým odvozením

Slovní vysvětlení matematického odůvodnění algoritmu se čínským učitelům zdálo nutné, ale ne postačující. Jak jsme ukázali v předchozích kapitolách, čínští učitelé po podání výkladu své vysvětlení obvykle odůvodnili symbolickým odvozením. Například v případě násobení víceciferných čísel někteří z amerických učitelů vysvětlovali, že úlohu $123 \cdot 645$ lze rozdělit na tři „malé úlohy“: $123 \cdot 600$, $123 \cdot 40$ a $123 \cdot 5$. Částečné součiny pak jsou 73800, 4920, 615, a ne 738, 492, 615. Ve srovnání s důrazem většiny amerických učitelů na „zarovnávání“ je toto vysvětlení konceptuální. Čínští učitelé však podávali výklad, který byl ještě přesnější. Zaprvé, zpravidla poukázali na to, že logickým

[47] Základ číselné soustavy – viz pozn. pod čarou 22 na str. 12.

základem algoritmu je distributivní zákon[48]. Potom ukázali, jak jsme popsali ve druhé kapitole, způsob odvození algoritmu z distributivního zákona a ilustrovali, jak distributivní zákon funguje v této situaci a proč to dává smysl:

$$
\begin{aligned}
123 \cdot 645 &= 123 \cdot (600 + 40 + 5) \\
&= 123 \cdot 600 + 123 \cdot 40 + 123 \cdot 5 \\
&= 73800 + 4920 + 615 \\
&= 78720 + 615 \\
&= 79335
\end{aligned}
$$

U tématu dělení zlomkem byly interpretace čínských učitelů ještě důmyslnější. Pomocí pojmů, které „se žáci naučili", různými způsoby dokázali ekvivalentnost výrazů $1\frac{3}{4} : \frac{1}{2}$ a $1\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{1}$. Tohle je jeden důkaz založený na vztahu mezi zlomkem a dělením ($\frac{1}{2} = 1 : 2$):

$$
\begin{aligned}
1\tfrac{3}{4} : \tfrac{1}{2} &= 1\tfrac{3}{4} : (1 : 2) \\
&= 1\tfrac{3}{4} : 1 \cdot 2 \\
&= 1\tfrac{3}{4} \cdot 2 : 1 \\
&= 1\tfrac{3}{4} \cdot (2 : 1) \\
&= 1\tfrac{3}{4} \cdot \tfrac{2}{1}
\end{aligned}
$$

[48] V čínském matematickém kurikulu se součtové verze komutativního a asociativního zákona poprvé zavádějí ve třetím ročníku. Komutativní, asociativní a distributivní zákony pro násobení se zavádějí ve čtvrtém ročníku. Zavádějí se jako alternativy standardního postupu. O komutativním zákonu učebnice například uvádí: „Když se při sčítání dvou čísel zamění pořadí sčítanců, součet se nezmění. Tomu se říká komutativní zákon sčítání. Jestliže písmena a a b označují dva libovolné sčítance, můžeme komutativní zákon zapsat jako $a + b = b + a$. Postup kontroly součtu záměnou pořadí sčítanců, který jsme se naučili, je odvozen z tohoto zákona." (Beijing, Tianjin, Shanghai, and Zhejiang Associate Group for Elementary Mathematics Teaching Material Composing, 1989, s. 82–83). Učebnice ilustruje, jak lze dva zákony využít ke „způsobu rychlého počítání". Žáci se například učí, že úlohu 258 + 791 + 642 lze vypočítat rychleji tak, že ji přeměníme na (258 + 642) + 791, a že rychlejší způsob výpočtu 1646 – 248 – 152 je přeměnit to na 1646 – (248 + 152).

Důkaz vycházející z pravidla „zachování hodnoty podílu“ vypadá takto:

$$\begin{aligned}1\tfrac{3}{4} : \tfrac{1}{2} &= \left(1\tfrac{3}{4} \cdot \tfrac{2}{1}\right) : \left(\tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{2}{1}\right)\\ &= \left(1\tfrac{3}{4} \cdot \tfrac{2}{1}\right) : 1\\ &= 1\tfrac{3}{4} \cdot \tfrac{2}{1}\\ &= 3\tfrac{1}{2}\end{aligned}$$

Kromě toho, jak jsme ukázali ve třetí kapitole, při předvádění různých nestandardních postupů řešení úlohy $1\tfrac{3}{4} : \tfrac{1}{2}$ a odvozování těchto řešení čínští učitelé používají matematické formulace. Ve svých třídách široce užívají symbolické interpretace. Jak uvedla zkušená Li, její žáci používají matematické formulace, aby vlastním způsobem popsali postup přeskupování: $34 - 6 = 34 - 4 - 2 = 30 - 2 = 28$. Jiní čínští učitelé z této studie o podobných případech také hovořili.

Výzkumníci zjistili, že žáci základních škol ve Spojených státech často vnímají znak rovnosti jako signál „udělej něco“ (viz např. Kieran, 1990, s. 100). To mi připomíná diskusi, kterou jsem vedla s jednou učitelkou americké základní školy. Zeptala jsem se jí, proč žákům tolerovala zápis typu $3 + 3 \cdot 4 = 12 = 15$. Řekla: „No, pořadí výpočtu provedli správně a dostali správný výsledek, tak v čem je problém?“ Podle názoru čínských učitelů však má být sémantika matematických operací interpretována přesně. Nelze tolerovat, aby byly dvě rozdílné hodnoty po obou stranách znaku rovnosti. Jak jednou ve třídě řekla moje učitelka ze základní školy, „znak rovnosti je duší matematických operací“. Měnit z určitého důvodu jednu nebo obě strany rovnosti a při tom zachovávat vztah „rovná se“ je ve skutečnosti „tajemstvím“ matematických operací.

Čínští učitelé byli zběhlí ve sčítání, v odstraňování závorek a v záměně pořadí operací v matematickém výrazu. Na základě několika jednoduchých vlastností, jako jsou tři základní zákony, pravidlo zachování hodnoty podílu a význam zlomků, odvodili šikovná symbolická odůvodnění aritmetických algoritmů, na které narazili v rozhovorech.

Jak ukázal Schoenfeld (1985), „důkaz“ jako forma vysvětlení je nezbytnost, je to přijatý standard v matematice. Čínští učitelé obvykle odůvodňovali matematická tvrzení jak slovně, tak symbolicky. Slovní odůvodnění zpravidla předcházelo symbolickému, které však bývalo přesnější. Poté co informovali o svém vyšetřování tvrzení žákyně, které jsme rozbírali ve čtvrté kapitole, všichni čínští učitelé své představy odůvodnili. Všichni, kteří předložili chybnou úvahu, podali jen slovní odůvodnění. Domnívám se, že kdyby použili symbolické interpretace, mohli se vyhnout chybám v argumentaci nebo je alespoň objevit.

Vícenásobné přístupy k provádění výpočtu: flexibilita pramenící z konceptuálního porozumění

I když mají být důkazy a vysvětlení přesné, matematika není zkostnatělá. Matematici používají různé přístupy k řešení úloh včetně aritmetických a oceňují je (Pólya, 1973). Ann Dowkerová (1992) požádala 44 profesionální matematiky, aby z hlavy odhadli výsledky deseti úloh na násobení a dělení celých a desetinných čísel. Nejpřekvapivějším výsledkem jejího šetření „bylo množství a pestrost jednotlivých strategií, které matematici použili“. „Matematici zpravidla používali strategie vyžadující znalosti aritmetických vlastností a vztahů“ a „jen zřídka strategii ‚postupovat algoritmicky‘“.

„Řešit úlohu více způsoby“ je také postojem čínských učitelů. U všech čtyř témat probírali jak standardní, tak alternativní přístupy. U tématu odčítání popsali nejméně tři způsoby přeskupování včetně přeskupení menšitelů. U tématu násobení víceciferných čísel uvedli nejméně dvě vysvětlení algoritmu. Jeden učitel ukázal šest způsobů zarovnávání částečných součinů. U tématu dělení zlomkem čínští učitelé předvedli alespoň čtyři způsoby, jak dokázat standardní algoritmus a tři alternativní metody výpočtu.

Čínští učitelé u všech aritmetických témat ukázali, že i když lze vždy použít standardní algoritmus, nemusí to být v každém případě nejlepší metoda. Flexibilní použití algoritmu a jeho různých verzí umožňuje získat pro daný případ nejlepší řešení. Čínští učitelé například upozornili na několik způsobů, jak vypočítat $1\frac{3}{4} : \frac{1}{2}$. Všechny tyto alternativní postupy, jako použití desetinných čísel, distributivního zákona či dalších matematických nápadů, byly rychlejší a snazší než standardní algoritmus. Je-li někdo schopen počítat více způsoby, znamená to, že překročil formálnost algoritmu a dospěl k podstatě číselných operací, k zásadním matematickým myšlenkám a principům, které jsou v nich obsaženy. To, že jednu úlohu lze řešit více způsoby, je důsledkem skutečnosti, že se matematika neskládá z izolovaných pravidel, nýbrž ze vzájemně propojených myšlenek. Jestliže tedy někdo dokáže řešit úlohu více způsoby a obvykle tak postupuje, odhaluje to jeho schopnost a zálibu propojovat matematické oblasti a témata.

Přistupovat k tématu různými způsoby, odůvodňovat různá řešení, srovnávat je a hledat mezi nimi to nejlepší, to je vlastně stálá hnací síla rozvoje matematiky. Vyšší operace nebo vyšší oblast matematiky obvykle nabízí důmyslnější způsob řešení úloh. Například násobení je při řešení některých úloh vyšší operací než sčítání. Některé algebraické metody řešení úloh jsou složitější než aritmetické metody. Když se problém řeší více způsoby, slouží to jako uzel spojující několik součástí matematických znalostí. To, jak čínští učitelé nahlížejí čtyři základní aritmetické operace, ukazuje, jak dokážou sjednotit celou oblast elementární matematiky.

Vztahy mezi čtyřmi základními operacemi: „silniční síť“ propojující oblast elementární matematiky

Aritmetika, „umění výpočtu“, se skládá z početních operací. Američtí a čínští učitelé ovšem tyto operace nahlíželi zjevně odlišně. Američtí učitelé se zpravidla zaměřovali na konkrétní algoritmus spojený s operací, například algoritmus odčítání s přeskupováním, algoritmus pro násobení víceciferných čísel nebo algoritmus pro dělení zlomkem. Naproti tomu čínští učitelé se více zajímali o samotné operace a vztahy mezi nimi. Například se zajímali o rychlejší a snazší způsoby provádění daných výpočtů, o to, jak spolu tyto čtyři operace souvisejí a jak se význam operací a vztahy mezi nimi interpretují v různých podmnožinách čísel – pro celá čísla, zlomky a desetinná čísla.

Když čínští učitelé učí odčítání s rozkládáním jednotky vyššího řádu, začínají sčítáním se skládáním jednotky vyššího řádu. Když rozebírali „pravidlo zarovnávání" při násobení víceciferných čísel, srovnávali to s pravidlem zarovnávání při sčítání víceciferných čísel. Při interpretaci významu dělení popisovali, jak se modely dělení odvozují od významu násobení. Učitelé také upozornili na to, jak zavedení nové množiny čísel – zlomků – vnáší nové rysy do aritmetických operací, které byly dosud omezeny na celá čísla. Ve svých rozborech vztahu mezi obvodem a obsahem obdélníku čínští učitelé zase toto téma rozhovoru spojovali s aritmetickými operacemi.

V rozborech čínských učitelů byly patrné dva druhy vztahů, které spojují čtyři základní operace. Jeden bychom mohli nazvat „odvozená operace". Například násobení je operace odvozená od sčítání. Řeší určité druhy složitých úloh na sčítání jednodušším způsobem.[49] Druhým vztahem je inverzní operace. Výraz inverzní operace nezmínil žádný z amerických učitelů, zato ho velmi často užívali čínští učitelé. Odčítání je inverzní operací ke sčítání a dělení je inverzní operací k násobení. Tyto dva druhy vztahů úzce propojují všechny čtyři operace. Protože všechna témata elementární matematiky souvisejí s těmito čtyřmi operacemi, pochopení vztahů mezi čtyřmi operacemi se stává silniční sítí propojující celou elementární matematiku.[50] Touto silniční sítí se lze dostat kamkoli v celé oblasti.

[49] I když čtyři otázky v rozhovorech neposkytly prostor pro diskuse o vztahu mezi sčítáním a násobením, čínští učitelé to ve skutečnosti považují za velmi důležité pojetí ve své každodenní výuce.

[50] Ty dva druhy vztahů mezi čtyřmi základními operacemi se ve skutečnosti týkají i všech vyšších operací v matematice. „Silniční síť" elementární matematiky proto ztělesňuje „silniční síť" v celé disciplíně.

ZNALOSTNÍ BALÍČKY A JEJICH KLÍČOVÉ SOUČÁSTI: ROZUMĚT PRŮBĚŽNÝM SOUVISLOSTEM V UČENÍ

Jiným charakteristickým rysem znalostí čínských učitelů, který se nevyskytoval mezi americkými učiteli, jsou jejich dobře vypracované „znalostní balíčky". Čtyři rysy diskutované výše se týkají toho, jak učitelé rozumějí oblasti elementární matematiky. Naproti tomu znalostní balíčky ukazují, jak učitelé chápou průběžný proces otevření a rozvíjení této oblasti v mysli žáků. Aritmetiku jako intelektuální oblast vytvořily a rozvinuly lidské bytosti. Starostí učitelů elementární matematiky je učit a naučit aritmetiku, vytvářet podmínky, za nichž mohou mladí lidé tuto oblast ve své mysli znovu vybudovat. Psychologové se věnují studiu toho, jak se žáci učí matematiku. Učitelé matematiky mají svou vlastní teorii, jak se učit matematiku.

Tři znalostní balíčky odvozené z rozborů odčítání s přeskupováním, násobení víceciferných čísel a dělení zlomkem, které prezentovali čínští učitelé, mají podobnou strukturu. Všechny mají posloupnost témat uprostřed a „kruh" souvisejících témat připojených k tématům v posloupnosti. Posloupnost v balíčku pro odčítání postupuje od tématu sčítání a odčítání do 10 ke sčítání a odčítání do 20, dál k odčítání čísel od 20 do 100 s přeskupováním až k odčítání velkých čísel s přeskupováním. Posloupnost v balíčku pro násobení obsahuje násobení jednocifernými čísly, násobení dvojcifernými čísly a násobení trojcifernými čísly. Posloupnost v balíčku pro význam dělení zlomkem jde od významu sčítání k významu dělení celými čísly a přes význam násobení zlomkem až k významu dělení zlomkem. Učitelé jsou přesvědčeni, že tyto posloupnosti představují hlavní cestu, kterou se znalosti a dovednosti v těchto třech tématech vyvíjejí.

Takové lineární posloupnosti se však nevyvíjejí samostatně, ale opírají se o jiná témata. V balíčku pro odčítání například „sčítání a odčítání do 10" souvisí se třemi dalšími tématy: se skladbou 10, se skládáním a rozkládáním jednotky vyššího řádu a se sčítáním a odčítáním jako vzájemně inverzními operacemi. Téma „odčítání s přeskupováním čísel mezi 20 a 100“ otevřené v rozhovorech se opíralo o pět položek: skladba čísel do 10, základ číselné soustavy, sestavení a rozložení jednotky vyššího řádu, sčítání a odčítání jako vzájemně inverzní operace a odčítání bez přeskupování. Položka v kruhu přitom může souviset s několika součástmi balíčku. Například jak „skládání a rozkládání jednotky vyššího řádu“, tak „sčítání a odčítání jako vzájemně inverzní operace“ souvisí se čtyřmi dalšími součástmi. S podporou těchto témat vývoj středových posloupností získává na matematickém významu a konceptuálně se obohacuje.

Učitelé nepřikládají všem těm věcem stejnou důležitost. Každý balíček obsahuje „klíčové“ součásti, které mají větší „váhu“ než jiné. Některé z klíčových součástí se nacházejí v lineární posloupnosti a některé jsou v „kruhu“. Učitelé uvedli několik důvodů, proč považují určitou součást znalostí za „klíčovou“. Zvláštní pozornost věnují první příležitosti, při níž se pojem nebo dovednost zavádí. Příkladem je téma „sčítání a odčítání do 20“ v souvislosti s výukou odčítání s přeskupováním. Téma „násobení dvojcifernými čísly“ bylo považováno za důležitý krok pro učení se násobení víceciferných čísel. Čínští učitelé jsou přesvědčeni, že když se žáci naučí nějaké pojetí pořádně hned při prvním uvedení, „získají dvakrát tolik s polovinou úsilí, které by vynaložili při učení později“. V opačném případě člověk „dosáhne polovičního výsledku s dvojnásobným úsilím“.

Jiným druhem klíčové součásti ve znalostním balíčku je „pojmový uzel“. Když čínští učitelé například hovořili o významu dělení zlomkem, upozorňovali na význam násobení zlomkem. Jsou přesvědčeni, že spojuje dohromady pět důležitých pojmů souvisejících s významem dělení zlomkem: význam násobení, modely dělení celými čísly, pojem zlomku, pojem celku a význam násobení celými čísly. Důkladné porozumění významu násobení zlomkem potom žákům umožní, aby porozuměli významu dělení zlomkem. Na druhé straně se současně učitelé domnívají, že zkoumání významu dělení zlomkem je dobrou příležitostí vrátit se k těmto pěti pojmům a hlouběji jim porozumět.

Procedurální a konceptuální témata jsou ve znalostních balíčcích vzájemně provázána. Učitelé, kteří tématu rozuměli konceptuálně a chtěli u žáků rozvíjet konceptuální učení, rozhodně neopomíjeli procedurální znalosti. Z jejich pohledu ve skutečnosti není konceptuální porozumění nikdy odděleno od příslušných postupů, v nichž porozumění „žije".

Čínští učitelé si také myslí, že je velmi důležité, aby učitel znal celou oblast elementární matematiky i celý proces, jak se ji naučit. Zkušený Mao řekl:

> *Jako učitel matematiky musí člověk znát místo každé součásti znalostí v celém systému matematiky a její souvislosti se znalostmi získanými dříve*. V tomto roce například učím čtvrťáky. Když otevřu učebnici, musím vědět, jak témata v ní obsažená souvisejí se znalostmi vyučovanými v prvním, druhém a třetím ročníku. Když učím násobení trojcifernými čísly, vím, že se moji žáci naučili násobilku, násobení jednocifernými čísly do 100 a násobení dvojcifernými čísly. Protože se naučili, jak násobit dvojcifernými čísly, při výuce násobení trojciferným číslem je prostě nechám, aby nad tím bádali sami. Nejprve jim dám několik úloh s dvojciferným činitelem. Pak jim dám úlohu s trojciferným činitelem a nechám je, aby samostatně přemýšleli, jak to vyřešit. Násobili jsme číslicí na místě jedniček a číslicí na místě desítek, teď se chystáme násobit číslicí na místě stovek. Co můžeme udělat, kam umístíme součin a proč? Ať o tom přemýšlejí. Pak se úloha snadno vyřeší. Takovým způsobem místo vlastního přímého výkladu jim objasním logický základ. *Na druhé straně musím vědět, jaké znalosti se budou budovat na tom, co je učím dnes*. (kurzívou zvýraznila autorka)

ELEMENTÁRNÍ MATEMATIKA JAKO MATEMATICKÝ ZÁKLAD

Diskuse čínských učitelů předvedla propracovaný a ucelený obraz elementární matematiky. Ukázala, že elementární matematika není jednoduchou sbírkou nesouvisejících číselných faktů a početních algoritmů. Je to duševně náročná, podnětná a vzrušující oblast, základ, na kterém se dá mnoho postavit. Elementární matematika představuje matematický základ. Výraz *základ* zde má tři související významy: něco, co je základové, primární a elementární. Matematika je vědní oblast, která se zabývá prostorovými a číselnými vztahy a v které je odůvodňování na těchto vztazích založeno. Dvěma hlavními odvětvími disciplíny matematiky historicky jsou aritmetika a geometrie. I když je dnes množství odvětví disciplíny větší a celá oblast se rozšířila, postavení aritmetiky a geometrie jako základů matematiky se nezměnilo. Žádné z nových odvětví, ať čisté nebo aplikované, nepracuje bez základních matematických pravidel a početních dovedností zavedených v aritmetice a geometrii. Matematika ze základní školy, složená z aritmetiky a základní geometrie, je proto základem disciplíny, na němž jsou budována další odvětví.

Výraz *prvotní* odkazuje na jiný rys elementární matematiky. Elementární matematika obsahuje zárodky mnoha důležitých pojmů pokročilejších odvětví disciplíny. Například algebra je způsob, jak uspořádat známé a neznámé v rovnicích, aby se z neznámých mohly stát poznatelné. Jak jsme viděli v předchozích kapitolách, tři základní zákony – komutativní, asociativní a distributivní – s jejichž pomocí se tyto rovnice řeší, mají přirozené kořeny v aritmetice. Představy množiny, vzájemně jednoznačného přiřazení a uspořádání jsou implicitně obsaženy v počítání. Množinové operace jako sjednocení a kartézský součin souvisejí s významem sčítání a násobení celých čísel. Základní myšlenky diferenciálního a integrálního počtu jsou obsaženy v logické podstatě výpočtu obsahu kruhu v elementární geometrii.[51]

---

[51] Když čínští učitelé učí vzorec pro obsah kruhu, přinášejí do třídy papírový kruh. Každá polovina kruhu má jinou barvu. Kruh se nejprve rozstřihne na dvě poloviny. Každá z nich se pak nastříhá na úzké části jako koláč tak, aby zůstaly v okrajích spojeny. Obě poloviny kruhu se rozevřou a zasunou do sebe tak, že utvoří jakoby obdélníkovou oblast: . Učitelé řeknou žákům, aby si představili, že se kruh rozstříhá na ještě větší množství dílků, takže vzniklá oblast se ještě více přiblíží obdélníku. Na základě vzorce pro obsah obdélníku pak žáci pochopí, jak je odůvodněn vzorec pro obsah kruhu. Tento způsob přibližného vyjádření obsahu kruhu byl znám v 17. století (viz Smith, Mikami, 1914, s. 131).

Základové a prvotní rysy matematiky jsou ovšem prezentovány v elementárním formátu. Elementární je proto, že tam se žáci začínají učit matematiku. Proto se to jeví jako přímočaré a snadné. Zdánlivě jednoduché myšlenky vložené do mysli žáků v tomto stadiu zůstanou uchovány po celou dobu, co se budou učit matematiku. V dalších fázích učení si například žáci nikdy z mysli nevymažou pojem rovnosti, který se naučili ze vztahu „1 + 1 = 2“, i když se bude měnit a rozvíjet.

Z hlediska dosahování matematických schopností tak učit elementární matematiku neznamená jen dovést žáky na konec aritmetiky nebo na začátek „předalgebry“. Znamená to dát jim základy, na kterých budou budovat své další poznávání matematiky.

Američtí odborníci prohlašují, že pokročilá témata lze žákům v základní škole předkládat intelektuálně poctivým způsobem. Bruner před třiceti lety prohlásil, že žákům základních škol lze uvádět myšlenky pokročilé matematiky, jako je topologie, projektivní geometrie, teorie pravděpodobnosti a teorie množin (Bruner 1960/1977). Jeho návrh zopakoval Hirsch (1996). Kaput, Steen a jejich kolegové navrhují „vláknové uspořádání“ školské matematiky (Kaput, Nemirovsky, 1995; Steen, 1990). Kritizují tradiční organizaci školské matematiky ve stylu „vrstev dortu“, protože „vybírá jen velmi málo vláken (např. aritmetiku, geometrii a algebru) a uspořádává je horizontálně do kurikula“ (Steen, s. 4). Místo toho navrhují průběžnou strukturu „se silnější vertikální souvislostí s cílem propojit v prožitcích žáků při výuce kořeny matematiky s jejími odvětvími“ (Steen, s. 4) a přirovnávají to ke stromu s kořeny představujícími různá vlákna jako „dimenze“, „prostor“, „změna a variace“ atd. (Kaput, Nemirovsky, s. 21).

Učitelé základních škol v této studii, kteří se vyznačují konceptuálním porozuměním, však nemusejí být tak radikální jako Kaput a Steen. Jak se ukázalo v rozhovorech s učiteli, elementární matematika tvořená aritmetikou a základní geometrií již obsahuje důležité matematické myšlenky. Pro tyto učitele „horizontálně uspořádané kurikulum“ může mít také „vertikální souvislost“. Aritmetika může obsahovat i „četné interpretace“,

„vážnou matematiku“ a „skutečné matematické debaty“.[52] Podle mne je přesnější metafora, kterou k ilustraci školské matematiky používají čínští učitelé. Mají za to, že elementární matematika je základem k tomu, co se jejich žáci budou dále učit v matematice a co bude přínosem pro jejich další život. To, co se žáci budou dále učit, je jako vícepatrová budova. Základy možná nejsou z vyšších pater vidět, jsou to však právě základy, co vyšší patra podpírá a zajišťuje, že všechna patra (odvětví) drží pohromadě. To, že přichází nová matematika a rozvíjí se, nemá být považováno za popření matematických základů. Naopak, má nás to vést k ještě lepšímu porozumění elementární matematice, jejímu silnému potenciálu a konceptuálním zárodkům pro pokročilá odvětví.

DŮKLADNÉ POROZUMĚNÍ MATEMATICKÝM ZÁKLADŮM

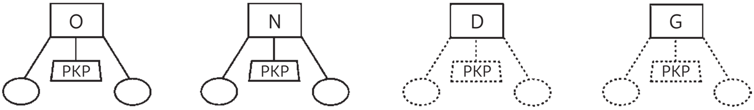
Matematické jádro elementární matematiky je skutečně tím, co ji umožňuje pochopit uceleně. Porozumění elementární matematice však není vždy ucelené. Z procedurálního hlediska souvisejí aritmetické algoritmy jen málo, pokud vůbec, s jinými tématy a jsou vzájemně izolované. Vezmeme-li například čtyři témata z této studie, odčítání s přeskupováním nemá nic společného s násobením víceciferných čísel, s dělením zlomkem ani s obsahem a obvodem obdélníku.

Obrázek 5.1 zobrazuje typické procedurální porozumění těmto čtyřem tématům. Písmena O, N, D a G představují naše čtyři témata: odčítání s přeskupováním, násobení víceciferných čísel, dělení zlomkem a geometrické téma (výpočet obvodu a obsahu). Obdélníky představují procedurální znalosti těchto témat. Ovály představují další procedurální znalosti, které s těmito tématy souvisejí. Lichoběžníky pod obdélníky představují pseudokonceptuální porozumění (PKP) tématům. Tečkované

[52] „Četné interpretace“, „skutečné matematické debaty“ a „kvalitativní porozumění matematickým modelům“ jsou rysy výuky matematiky, které prosazuje Kaput se svými kolegy (Kaput, Nemirovsky, 1995).

útvary představují chybějící položky. Všimněme si, že porozumění jednotlivým tématům nejsou propojena.

Čtyři témata v obrázku 5.1 jsou v podstatě vzájemně nezávislá a v každém znalostním balíčku je obsaženo jen několik prvků.[53] Pseudokonceptuální výklady algoritmů jsou charakteristickým rysem porozumění, které je jen procedurální. Někteří učitelé vymýšleli zcela libovolné výklady. Někteří jednoduše slovně popsali algoritmus. Nicméně i k vymyšlení nebo citování pseudokonceptuálního výkladu je nutné dobře znát algoritmus. Jak je vidět z některých reakcí na dělení zlomkem a na geometrická témata, učitelé, kteří stěží uměli algoritmus provést, zpravidla nebyli ani schopni ho vysvětlit nebo spojit s jinými postupy. Má-li učitel s procedurálním pohledem jen izolované nebo nedostatečně propracované znalostní balíčky, jeho porozumění matematice je jen útržkovité.



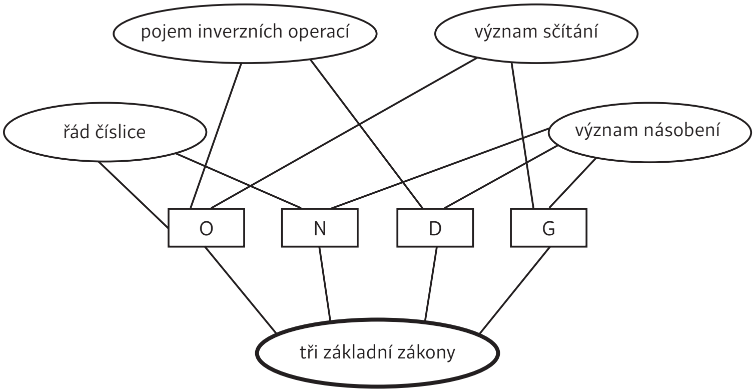
Obr. 5.1. Procedurální znalosti učitelů týkající se uvedených čtyř témat.

Z konceptuálního pohledu však všechna čtyři témata spolu souvisejí, spojují je společné matematické pojmy. Například na pojmu řádu číslice stojí algoritmy pro odčítání s přeskupováním a pro násobení víceciferných čísel. Pojem řádu číslice na dané pozici tak tvoří spojení mezi oběma pojmy. Pojem inverzních operací je součástí jak logického odůvodnění odčítání s přeskupováním, tak vysvětlení významu dělení zlomkem. Proto pojem inverzních operací spojuje odčítání s přeskupováním a dělení zlomkem. Některé pojmy, jako význam násobení, jsou společné

[53] U každého tématu učitel zpravidla vidí další témata, která s jeho výukou souvisejí. Je-li procedurální, učitel může vidět jeho vysvětlení. Je-li konceptuální, učitel může vidět související postup nebo pojetí. Tato tendence spouští organizování dobře vybudovaného „znalostního balíčku“. Proto zde používám výraz „znalostní balíček“ pro skupinu témat, která učitelé obvykle vidí kolem tématu, které učí.

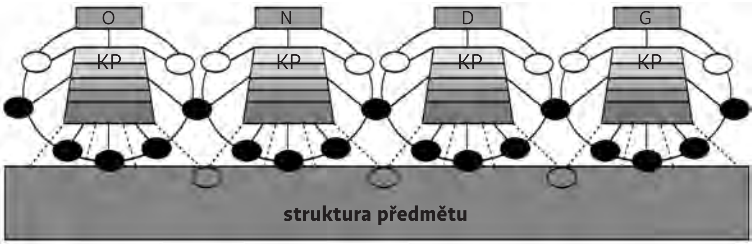
třem ze čtyř témat. Některé pojmy, jako například tři základní zákony, jsou sdíleny všemi čtyřmi tématy. Obrázek 5.2 znázorňuje souvislosti matematických témat z konceptuálního hlediska.

I když v něm nejsou zahrnuty všechny pojmy sdílené čtyřmi tématy, obrázek 5.2 ukazuje, jak čtyři témata a vztahy mezi nimi vytvářejí síť. Některé prvky nesouvisejí přímo se všemi čtyřmi tématy. Jejich rozličná spojení se však překrývají a proplétají. Tři základní zákony se v diskusích čínských učitelů objevovaly u všech čtyř témat.



Obr. 5.2. Několik sdílených pojmů spojuje čtyři témata.

Zatímco obrázek 5.1 znázorňuje procedurální pohled na čtyři témata, obrázek 5.3 zobrazuje konceptuální porozumění (KP) těmto tématům. Čtyři témata jsou znázorněna čtyřmi obdélníky nahoře. Elipsy představují znalosti, které jsou součástmi znalostních balíčků. Bílé elipsy znázorňují procedurální témata, světle šedé znázorňují konceptuální témata, tmavě šedé představují základní principy a tečkovanými čarami připojené elipsy představují obecné postoje k matematice.



Obr. 5.3. Konceptuální znalosti učitelů týkající se čtyř témat.

Jsou-li matematické znalosti složeny z dobře propracovaných a vzájemně propojených znalostních balíčků, pak tvoří síť, která se pevně opírá o strukturu předmětu. Obrázek 5.3 rozšiřuje model konceptuálního porozumění konkrétnímu tématu, který je uveden na obrázku 1.4, a ilustruje šíři, hloubku, propojenost a důslednost učitelova konceptuálního porozumění matematice. Protože se čtyři témata nacházejí v různých oblastech elementární matematiky, tento model je také zmenšeninou učitelova konceptuálního porozumění oblasti elementární matematiky.

Elipsy připojené tečkovanými čarami, obecné postoje k matematice, obvykle nejsou v znalostních balíčcích učitelů pro konkrétní témata obsaženy. Přispívají však významně ke konzistentnosti a ucelenosti učitelových znalostí matematiky. Základní postoje předmětu mohou být dokonce víc prostupující než jeho základní principy. Základní princip nemusí podpírat všechna témata, ale základní postoj se může vyskytovat s ohledem na každé téma. Základní postoje k matematice, které zmiňovali učitelé v rozhovorech, například „odůvodňovat tvrzení matematickými argumenty“, „vědět jak a vědět proč“, „zachovávat logickou konzistenci myšlenky v různých souvislostech“ a „přistupovat k tématu více způsoby“ patří ke všem tématům elementární matematiky.[54]

[54] Obě dimenze struktury – základní principy a základní postoje (Bruner 1960/1977) – mají velkou sílu při vytváření souvislostí. Obrázek 5.3 je bohužel příliš jednoduchý, aby dobře ilustroval vztahy typu jeden–několik mezi obecnými principy nebo postoji a matematickými pojmy nebo tématy.

Znalosti obsahu znázorněné na obrázku 5.3 nazývám důkladným porozuměním matematickým základům (DPMZ). Důkladným porozuměním míním takové porozumění terénu matematických základů, které je hluboké, široké a důsledné. Tři konotace tohoto výrazu – *hluboký*, *široký* a *důsledný* – jsou vzájemně propojené.

Eleanor Duckworthová, někdejší studentka a kolegyně Jeana Piageta, se domnívá, že výuku elementární matematiky a přírodovědy máme udržovat „hlubokou" a „komplexní" (1987, 1991). Inspirována Piagetovým zájmem o to, jak *daleko*, ne jak *rychle* má výuka postupovat, navrhla pojem „učit s hloubkou a šíří" (1979). Srovnávala stavění věže „kladením jedné cihly na druhou" se stavěním „na široké základně nebo na hlubokých základech" a řekla:

> Co je rozumovou obdobou stavění v šíři a hloubce? Myslím, že je to otázka vytváření souvislostí: o šíři můžeme uvažovat jako o značně rozdílných sférách zkušeností, které mohou spolu navzájem souviset; hloubkou můžeme myslet mnoho různých druhů spojení, které lze vytvořit mezi různými aspekty naší zkušenosti. Nejsem si jista, jestli lze vůbec rozumovou šíři a hloubku od sebe oddělit jinak, než když o nich hovoříme. (s. 7)

Souhlasím s Duckworthovou, že rozumová šíře a hloubka jsou „otázkou vytváření souvislostí" a že jsou obě spolu provázány. Její definice rozumové šíře a hloubky je však příliš obecná, aby se dala použít v diskusi o učení se matematice.[55] Navíc ani nevysvětluje, jaký je mezi nimi vztah.

---

[55] Pro pedagogické výzkumníky je hloubka znalostí obsahu u učitelů zřejmě subtilní a velmi zajímavá. Na jedné straně bude většina z nich souhlasit, že by porozumění učitelů mělo být hluboké (Ball, 1989; Grossman, Wilson, Shulman, 1989; Marks, 1987; Steinberg, Marks, Haymore, 1985; Wilson, 1988). Na druhé straně, protože termín *hloubka* je „neurčitý" a „těžko postižitelný ve své definici a velikosti" (Ball, 1989; Wilson, 1988), jeho pochopení postupuje jen pomalu. Ballová (1989) navrhla tři „specifické znaky" pro zásadní znalosti učitelů, správnost, význam a propojenost, aby se vyhnula výrazu *hluboký*, který považuje za neurčitý pro popis toho, jaké mají učitelé znalosti obsahu.

Na základě svého výzkumu definuji *porozumět tématu do hloubky* jako spojit ho s konceptuálně silnějšími představami o předmětu. Čím blíže je představa ke struktuře disciplíny, tím je mocnější, a tím víc témat tedy dokáže podpořit. *Porozumět tématu v šíři* naproti tomu znamená spojit je s tématy, která mají obdobnou nebo slabší konceptuální sílu. Vezměme například znalostní balíček pro odčítání s přeskupováním. Spojit odčítání s přeskupováním s tématy sčítání s přenosem, odčítání bez přeskupování a sčítání s přenosem je záležitostí šíře. Spojit je s pojmy jako základ číselné soustavy nebo s pojetím toho, že sčítání a odčítání jsou inverzní operace, je věcí hloubky. Hloubka a šíře však závisí na důslednosti, na schopnosti „projít" všemi částmi oboru, navzájem je provázat. Důslednost je skutečně tím, co „slepuje" matematické znalosti do souvislého celku.

Důkladné porozumění elementární matematice je samozřejmě možné proto, že elementární matematika je především oborem hloubky, šíře a důslednosti. Učitelé, kteří jí rozumějí takto hluboce, široce a důsledně, nevymýšlejí souvislosti mezi matematickými představami, ale odhalují a interpretují je prostřednictvím výuky matematiky a učení se matematice. Taková výuka a učení se mají zpravidla následující vlastnosti:

Propojenost. Učitel s DPMZ se celkově snaží vytvářet spojení mezi matematickými pojmy a postupy, od jednoduchých a povrchních spojení mezi jednotlivými částmi znalostí po složitá a podstatná spojení mezi různými matematickými operacemi a oblastmi. Když se tato snaha odrazí ve výuce, pak to, co se žáci učí, nebude roztříštěné. Žáci se neučí izolovaná témata, ale ucelený soubor znalostí.

Různorodé pohledy. Ti, kdo dosáhli DPMZ, si uvědomují různé aspekty určité představy a rozličné přístupy k řešení včetně jejich výhod a nevýhod. Nadto dokážou ty rozličné aspekty a přístupy matematicky vysvětlit. Takovým způsobem mohou učitelé dovést žáky k pružnému chápání disciplíny.

Základní představy. Učitelé s DPMZ ukazují matematické postoje a zejména si uvědomují „jednoduché, ale silné základní pojmy a principy v matematice“ (např. myšlenku rovnosti). Tyto základní představy zpravidla opakují a posilují. Zaměřením se na tyto základní představy nejsou žáci jen *pobízeni*, aby se úlohami zabývali, nýbrž jsou *vedeni* k tomu, aby prováděli skutečnou matematickou činnost.

Průběžné souvislosti.[56] Učitelé s DPMZ se neomezují jen na znalosti, které se mají vyučovat v určitém ročníku, ale zásadním způsobem rozumějí celému kurikulu elementární matematiky. Díky DPMZ jsou učitelé připraveni využít každou příležitost k zopakování klíčových pojmů, které se žáci učili dříve. Vědí také, co se žáci budou učit později, a využívají příležitostí, aby k tomu položili vhodný základ.

Tyto čtyři vlastnosti spolu vzájemně souvisejí. Zatímco první vlastnost, propojenost, je obecným rysem výuky matematiky vedené člověkem s DPMZ, zbývající tři – různorodé pohledy, základní představy a průběžné souvislosti – jsou typy spojení, které vedou k různým aspektům smysluplného poznávání matematiky: šíře, hloubka a důslednost.

Statický model jako na obrázku 5.3 bohužel nemůže zobrazit dynamiku těchto spojení. Učitelé při vyučování organizují své znalostní balíčky podle kontextu výuky. Spojení mezi tématy se mění s postupující výukou. Ústřední součást znalostního balíčku pro jedno téma se může stát okrajovou součástí znalostního balíčku pro jiné téma a naopak.

Když jsem vedla rozhovory pro svou studii, zamýšlela jsem se nad tím, jak lidé znají obec nebo město, ve kterém žijí. Znají ho různým způsobem. Někteří lidé, například nově příchozí, znají jen místo, kde se nachází jejich dům. Někteří lidé znají velmi dobře své okolí, ale málokdy se vydají dále. Někteří lidé asi vědí,

[56] Kaput (1993) používá tento výraz při popisu kurikula. Já ho zde používám k popisu odpovídající vlastnosti učitelových znalostí. Tato vlastnost souvisí s aspektem, který Shulman (1986) nazývá kurikulární znalosti.

jak se dostat na některá místa ve městě, například kde pracují, kde jsou obchody, kam chodí nakupovat, kde jsou kina, do kterých chodí dívat se na filmy. Možná však znají jen jednu cestu, jak se tam dostat, a nikdy se nenamáhají zkoušet jiné trasy. Jsou ovšem lidé, například taxikáři, kteří ve svém městě velmi dobře znají všechny ulice. Při cestě z jednoho místa do druhého jsou velmi přizpůsobiví a sebejistí a znají alternativní trasy. Jste-li ve městě poprvé, mohou vás provézt trasou, která vám město nejlépe předvede. Když spěcháte, v každé denní době znají trasu, kterou se do cíle dostanete nejrychleji. Dokážou najít místo i bez úplné adresy. Když jsem hovořila s učiteli, uvědomila jsem si, že je určitá podobnost mezi tím, jak lze různými způsoby znát školskou matematiku, a tím, jak lze různými způsoby znát ulice ve městě. To, jak učitelé s DPMZ znají školskou matematiku, se mi zdá v jistém smyslu velmi podobné tomu, jak zdatný taxikář zná město. Taxikář také může mít v hlavě mapu uspořádání města. Učitelova mapa školské matematiky však musí být ještě složitější a pružnější.

SHRNUTÍ

V této kapitole jsme porovnávali, jak čínští a američtí učitelé celkově rozumějí čtyřem tématům diskutovaným v předchozích kapitolách. Odpovědi těchto dvou skupin učitelů ukazují, že elementární matematika je interpretována v Číně a ve Spojených státech zcela odlišně. Američtí učitelé sice prokazovali zájem o výuku vedoucí ke konceptuálnímu porozumění, jejich odpovědi však odrážely pohled, který je ve Spojených státech běžný, totiž že elementární matematika je „jednoduchá“, že je to nahodilá soustava faktů a pravidel, podle níž provádět matematiku znamená dodržovat krok za krokem sadu postupů, abychom dospěli k výsledku (Ball, 1991). Pro čínské učitele bylo důležité vědět, proč algoritmy dávají smysl, jakož i to, jak se provádějí. Měli podobné postoje jako praktikující matematici. Výklad zpravidla odůvodňovali symbolickým odvozením, úlohu řešili více způsoby a rozebírali vztahy mezi čtyřmi základními operacemi aritmetiky.

Čínští učitelé u každého ze tří témat z rozhovorů, které vyučují, popsali „znalostní balíček“, síť procedurálních a konceptuálních témat, která výuku příslušného tématu podporují nebo se o ni opírají. Role součástí znalostního balíčku se měnila. Situace, kdy byl určitý pojem zaváděn poprvé, byla považována za „klíčovou součást“ a ve výuce se na ni kladl větší důraz. Například „sčítání a odčítání do dvaceti“ se považuje za klíčovou součást znalostního balíčku pro odčítání s přeskupováním, protože je to poprvé, kdy se použije pojem skládání a rozkládání desítky.

Na elementární matematiku lze nahlížet jako na „jednoduchou“, nekomplikovanou matematiku – soustavu postupů – nebo jako na matematický základ. Matematický základ je elementární, základový, primární. Je elementární, protože u něj poznávání matematiky začíná. Je primární, protože obsahuje výchozí prvky pokročilejších matematických pojetí. Je základový, protože poskytuje základ toho, co se žáci budou dále učit.

Důkladné porozumění matematickým základům (DPMZ) nespočívá jen v dobrém konceptuálním porozumění elementární matematice. Znamená to uvědomovat si konceptuální strukturu a základní postoje v matematice spjaté s elementární matematikou a mít schopnost poskytovat pro tuto konceptuální strukturu základy a vštěpovat tyto základní postoje žákům. Důkladné porozumění matematice má šíři, hloubku a důslednost. Šíře porozumění je schopnost spojovat určité téma s tématy obdobné nebo slabší konceptuální síly. Hloubka porozumění je schopnost spojovat určité téma s tématy konceptuálně silnějšími. Důslednost je schopnost propojovat všechna témata.

Výuka učitele s DPMZ se vyznačuje propojeností, podporuje rozmanité přístupy k řešení dané úlohy, opakuje a posiluje různorodé myšlenky a je průběžně souvislá. Učitel s DPMZ dokáže žákům odhalit a interpretovat spojení mezi matematickými pojmy a postupy. Oceňuje různé stránky nějaké myšlenky a rozličné přístupy k řešení včetně jejich výhod a nevýhod a umí tyto různé stránky a přístupy žákům vysvětlit. Učitel s DPMZ si je vědom „jednoduchých, ale silných“ základních myšlenek v matematice a snaží se je opakovat a posilovat. Zásadním způsobem rozumí celému kurikulu elementární matematiky, a je tedy připraven využít příležitostí k zopakování pojmů, které se žáci učili dříve, a klást základy pro pojmy, které se budou učit později.