7

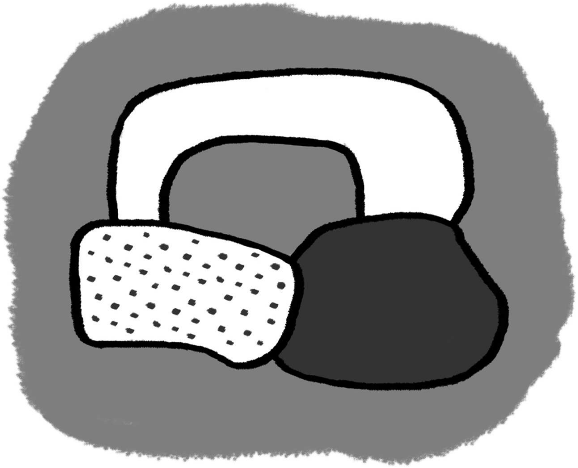
PROČ JSOU MATEMATICI TAK POSEDLÍ DOKAZOVÁNÍM?

Některé úlohy v matematice se snadno formulují, ale nesmírně těžko dokazují.

Například v roce 1886 ředitel Cliftonovy koleje v Bristolu J. M. Wilson zadal celé škole následující „soutěžní úlohu“:

> Dokažte, že každou rovinnou mapu lze vybarvit nejvýše čtyřmi barvami tak, aby žádné dvě sousední země nebyly vybarveny stejnou barvou.

Obr. 26: Cliftonova kolej v Bristolu v roce 1898.



Obr. 27: Jednoduchá mapa, k jejímuž vybarvení jsou třeba čtyři barvy.

Úloha vznikla ještě o nějakých 30 let dříve a na obrázku 27 je jednoduchý příklad ukazující, že čtyři barvy jsou nezbytné.

Wilson žádal své žáky, aby mu předložili řešení „nejpozději 1. prosince“, a přidal jednu přísnou podmínku:

> Řešení nesmí být delší než jedna stránka s 30 řádky rukopisu a jedna stránka s obrázky.

To se však ukázalo jako nesmírně optimistické.

Když větu o čtyřech barvách konečně o 90 let později dokázali K. Appel s W. Hakenem, důkaz obsahoval 10 000 obrázků a stoh papírů potištěných výstupem z počítače byl víc než metr vysoký. Dokonce to vyvolalo zásadní otázky o tom, co je důkaz v matematice.

„Zkouším dokázat větu“

Pro mnoho lidí je asi klíčová otázka o podstatě důkazu poněkud přízemnější, totiž: proč jsou matematici vůbec tak posedlí dokazováním?

Jasná odpověď samozřejmě zní, že bez důkazu může být dané tvrzení jednoduše chybné (obrázek 28).

Pondělí:	Zkouším dokázat větu.
Úterý:	Zkouším dokázat větu.
Středa:	Zkouším dokázat větu.
Čtvrtek:	Zkouším dokázat větu.
Pátek:	Věta neplatí.

Obr. 28: Tento lehce poťouchlý pohled na typický týden teoretického matematika pochází od Julie Robinsonové (1919–1985).

Když se na to však podíváme trochu hlouběji a budeme pátrat, proč tomu tak je, zjistíme, že matematici rádi tvoří *obecná* tvrzení typu „to a to platí pro nekonečný počet konkrétních případů“.

A to je v jistém smyslu nebezpečný podnik.

Svůdné tvrzení

Podívejme se třeba na následující příklad:

> Tvrzení: Pro libovolné přirozené číslo n platí, že $991n^2+1$ *není* čtvercové číslo.

„Čtvercovým číslem" zde rozumíme druhou mocninu přirozeného čísla, a pokud náhodou nejste v této oblasti odborníci (já skoro jistě nejsem), pak bude přirozené, když začneme tím, že se podíváme na několik jednoduchých případů.

Je-li $n = 1$, pak $991n^2 + 1 = 992$, což není čtvercové číslo. Nejbližší čtvercové číslo je $31^2 = 961$.

Je-li $n = 2$, pak $991n^2 + 1 = 3\,965$, což je „těsně vedle", protože $63^2 = 3\,969$.

Nicméně $n = 2$ také nevede ke čtvercovému číslu a mohli bychom například využít počítač a pokračovat v prověřování až třeba po $n = 1\,000$.

Pokud se vám tisíc konkrétních případů zdá málo, co takhle milion?

Nebo dokonce milion milionů?

Bohužel se ukazuje, že ani tak velký počet ověření zdaleka nestačí.

Tvrzení totiž neplatí. První hodnota n, u které zjistíme, že neplatí, je však

$$n = 12\,055\,735\,790\,331\,359\,447\,442\,538\,767.$$

A proto matematici potřebují *důkazy*.

8
MATOUCÍ MATEMATIKA

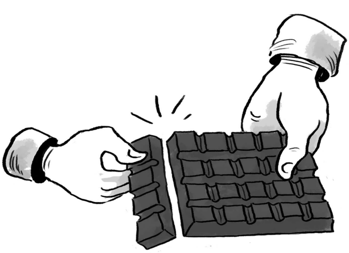
Tématem této knihy je matematika prováděná jednoduchými prostředky. Než se pustíme dál, pojďme stručně prozkoumat něco z toho, co se dá udělat *bez jakýchkoli prostředků*.

K tomu účelu předkládáme pět úloh typu hlavolamů, které obsahují prvky toho, co se dá nazvat matematickým myšlením. (Řešení jsou na stranách 161–163.)

Úloha s tabulkou čokolády

Tabulka čokolády na obrázku 29 je tvarována do $6 \cdot 4 = 24$ čtverečků a my bychom ji chtěli na těchto 24 čtverečků rozlámat.

V každém jednotlivém kroku smíme vzít jeden kus čokolády a rozlomit ho na dvě části podle vyznačených rýh.



Obr. 29: Lámání čokolády.

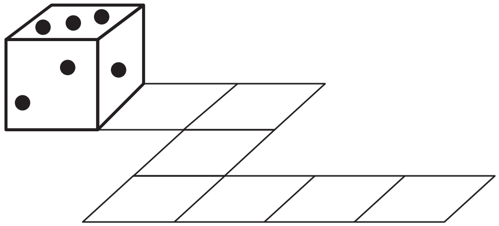
Otázka zní: jaký nejmenší počet takových rozlomení potřebujeme?

Aniž bychom chtěli čtenáři napovídat, poznamenejme, že úloha dobře ilustruje jeden z krásných aspektů matematiky, totiž dostat se k jádru věci tak, že *identifikujeme, co je nepodstatné, a nebereme to v úvahu*.

Převalování hrací kostky

Hrací kostka se převaluje přes hranu bez sklouznutí po dráze na obrázku 30. Připomeňme, že součet bodů na protějších stranách kostky je vždy 7. Otázka zní:

> Jaký počet bodů bude na vrchní straně kostky na konci naznačené dráhy?



Obr. 30: Úloha s hrací kostkou.

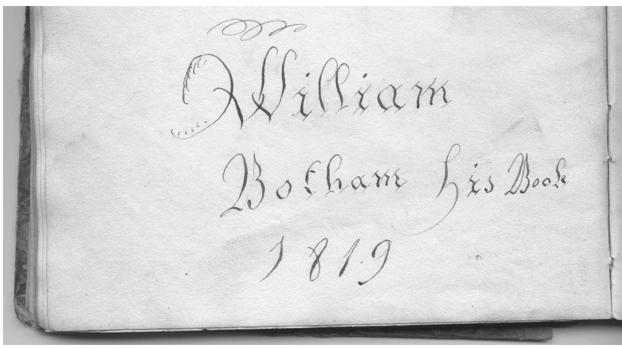
Tato úloha nabízí příležitost pro nápadité řešení, v němž se po celou dobu soustředíme pouze na jednu stranu kostky, která je důležitá.

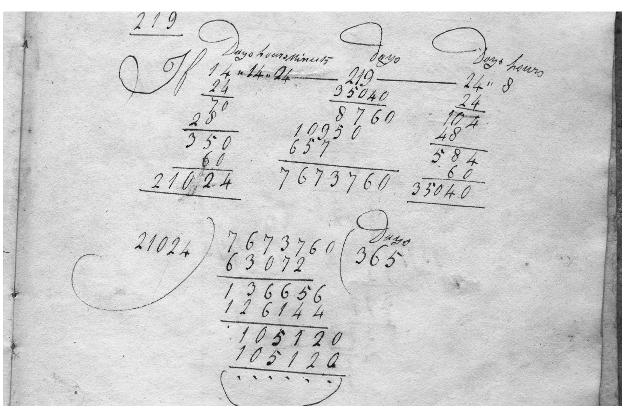
C opět „vítězí“!

Další příklad představuje poněkud neobvyklou úlohu z knihy Johna Bonnycastlea *Scholar's Guide to Arithmetic* (Příručka aritmetiky pro žáky) z roku 1806, v níž vystupují A, B a C:

> Tři chodci vyrazili současně z jednoho místa a obcházejí ostrov, jehož obvod měří 73 mil. Chodec *A* ujde 5 mil za 1 den, *B* 8 mil a *C* 10 mil. Kdy se opět všichni tři setkají na jednom místě?

Na tuto úlohu jsem poprvé narazil náhodou jinde.





Obr. 31: Z cvičebnice Williama Bothama.

Před několika lety jsem získal rukou psanou cvičebnici aritmetiky z roku 1819, která patřila jakémusi Williamu Bothamovi (obrázek 31).

Bohužel tam není napsáno, kdo to byl ani kde žil, a knížka sama se po 200 letech už dost rozpadá.

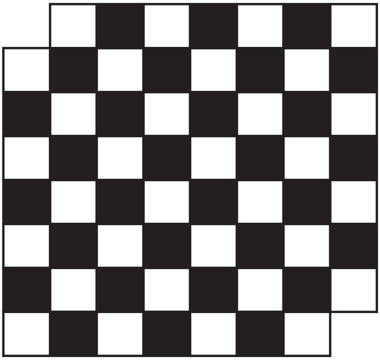
Způsob, jakým William Botham k neobvyklé úloze o A, B a C přistoupil, upoutal mou pozornost. Dospěl totiž ke správnému výsledku, ale až po čtyřech stránkách plných trýznivě dlouhých dělení, jak vidíme na obrázku 31.

Až se tedy proberete ze šoku, že C kráčel rychleji než A i B, dokážete si s tím poradit trochu lépe?

Pokažená šachovnice

Tahle úloha je asi dost známá, nabízí však dobrou příležitost k „důkazu sporem“.

Na obrázku 32 je šachovnice, z níž byla vyříznuta dvě pole v protějších rozích. Zbývá tedy na ní 62 polí a my máme k dispozici 31 kostek domina, z nichž každá může přesně zakrýt dvě sousední pole na šachovnici.



Obr. 32: Pokažená šachovnice.

Přesto těmi 31 kameny domina není možné pokrýt všech zbývajících 62 polí.

Proč?

Hádanka se čtyřmi kartami

V matematice na jakékoli úrovni je velmi důležité rozlišovat mezi výrokem

z P plyne Q

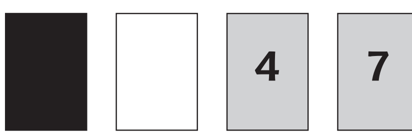
a obráceným výrokem

z Q plyne P,

který tak jako původní výrok může a nemusí být pravdivý.

Předpokládejme například, že nám někdo ukáže čtyři karty jako na obrázku 33, z nichž každá má na líci číslici a na rubu je buď černá, nebo bílá, a prohlásí, že platí následující pravidlo:

Je-li karta na rubu černá, má na líci sudé číslo.



Obr. 33: Hádanka se čtyřmi kartami.

Otázka zní: kterou kartu máme obrátit, abychom ověřili, jestli to pravidlo platí, nebo ne?

Tento příklad představuje test, který dobře znají kognitivní psychologové.

A mnozí lidé odpovídají špatně!