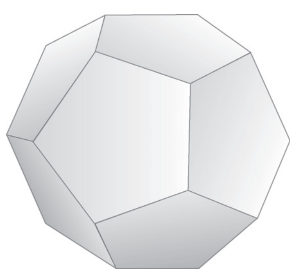
12. Bublanina – děs a dřina

Každý fyzik kdekoli na světě dobře ví, do jakého tvaru se zformují bubliny, když se na sebe nalepí. Ví to také každé malé dítě, které aspoň jednou v životě vidělo bublifuk. Každý matematik na světě zase ví, jaký tvar by bubliny měly mít. *Několik velice chytrých matematiků nedávno* dokázalo, *že všichni ostatní, včetně fyziků a malých dětí, měli pravdu.*

Dvanáctistěn, tvar dobře známý z geometrie, má dvacet vrcholů, třicet hran a dvanáct stěn, jak sám název napovídá. Stěny jsou pětiúhelníkového tvaru, jak vidíme na obrázku 33. Které trojrozměrné těleso ale má 22,83 vrcholů, 34,25 hran a 13,42 stěn, každou o 5,103 stranách? Asi nějaký hodně vykonstruovaný fraktál, ne? Mimochodem, fraktály, tedy ty podivné složité tvary, které přivedly Benoita Mandelbrotta až k ucelené teorii o nepravidelnosti přírody, mívají často necelou dimenzi, tak proč by nemohly mít také necelé počty vrcholů, ne? Nikoli. Těleso, které máme na mysli, je obyčejného a známého tvaru a nejspíš ho najdete u vás v domácnosti. Pořádně se rozhlédněte, až si dáte sklenici kofoly nebo piva, vlezete do sprchy a nebo se pustíte do umývání nádobí.

Samozřejmě, že si trochu vymýšlíme. Naše bizarní těleso lze nalézt v typické domácnosti asi tak, jako se v prů-

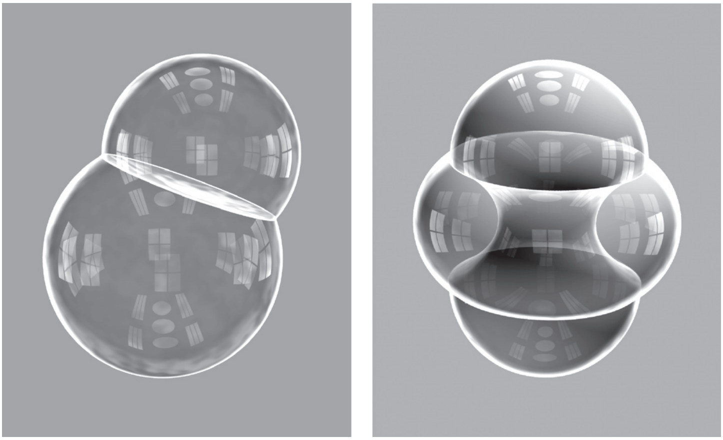


Obr. 33. Dvanáctistěn.

měrné rodině prohání 2,3 dítěte. Neexistuje samo o sobě, ale v průměru. A není to těleso, je to bublina, tedy „průměrná“ bublina v hromadě pěny. Pěna obsahuje tisíce bublin, nahňácaných na sebe ve formě maličkých nepravidelných mnohostěnů, přičemž průměrný počet vrcholů v oné pěně činí 22,9, průměrný počet hran 34,14 a průměrný počet stěn 13,39. Kdyby existovala nějaká průměrná bublina, její vzhled by velice připomínal dvanáctistěn.

Bubliny fascinují lidstvo po celou dobu od objevu mýdla a pěna byla k vidění všude kolem nás od nepaměti. Ale matematika s nimi spojená se pořádně rozjela teprve ve třicátých letech 19. století, kdy belgický fyzik Joseph Plateau poprvé ponořil drátěné rámečky do mýdlového roztoku a nestačil se divit nad výsledkem svého počínání. Avšak ani po 170 letech výzkumu stále ještě nemáme k dispozici úplné matematické vysvětlení, ba dokonce ani popis všech jevů, které Plateau odhalil. Notoricky známý, alespoň donedávna, byl případ takzvané „hypotézy dvojí bubliny“, která popisuje tvar, jehož by měly nabýt dvě bubliny poté, co se k sobě přitulí. Každý ví, že by to mělo vypadat asi jako na obrázku 34a, ale co třeba obrázek 34b, proč by to nešlo takto?

Mnoha dalším jevům, které Plateau objevil, však dnes již rozumíme dokonale. Pokusy s mýdlovými bublinami opakovaně prokázaly matematikům neocenitelnou pomoc při hledání precizních důkazů důležitých vět z geometrie. V době, kdy Plateau začínal pracovat s bublinami, zvolna přicházel o zrak. V roce 1829 podnikl optický experiment, který zahrnoval nepřetržité pozorování Slunce po 25 vteřin. Plateau si tímto pokusem važně poškodil zrak a v roce 1843 byl již úplně slepý. To mu ale nikterak nezabránilo v odhalování zásadních poznatků v nejvizuálnější matematické disciplíně, geometrii trojrozměrné-


(a) (b)

Obr. 34. (a) Hypotéza zdvojené bubliny tvrdí, že pokud se dvě bubliny spojí, pak vzniknou dvě sféry, které se setkají pod úhlem 120 stupňů. (b) Další možnosti, které zahrnují například tento burský oříšek v pneumatice, je třeba zavrhnout.

ho prostoru. Jeho práce v tomto oboru pokračovala ještě dlouho poté, co pozbyl posledních zbytků zraku.

Mýdlové bubliny a blány jsou typickými představiteli nesmírně důležité matematické koncepce nazvané „problém minimální plochy“. Minimální plochou je míněn povrch, jehož plošný obsah je nejmenší možný při zachování jistých dodatečných podmínek.

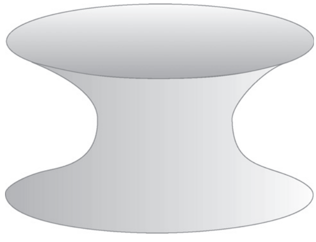
Minimální plochy se objevují v matematice bublin díky fyzikální veličině zvané *povrchové napětí*. Povrch kapaliny se chová, jako kdyby byl pružný, vyrobený z tenké kůže nebo gumy. Pokusíme-li se napnout povrch kapaliny, objeví se síla působící v opačném směru. Tuto sílu způsobuje struktura molekul na povrchu, která se od struktury molekul uvnitř kapaliny liší zejména absencí jistých chemických spojů. Důsledkem povrchového napětí je nahromadění energie na povrchu.

Matematika, která popisuje chybějící chemická propojení, je nesmírně komplikovaná, ale naštěstí existuje jistá její aproximace, která je v případech, kdy nás zajímají pouze celkové tvary povrchu a nikoli molekulární detaily, kromobyčejně přesná. Ukazuje se, že energie nahromaděná v důsledku povrchového napětí mýdlové blány je přímo úměrná jejímu povrchu.

Mýdlová bublina představuje minimální plochu, tedy povrch s minimálním plošným obsahem, neboť je to ve skutečnosti povrch s minimální energií. Vzhledem k tomu, že energie je rovna plošnému obsahu (nebo vlastně jen přímo úměrná, ale to je až na multiplikativní konstantu totéž), je plocha minimizující obsah identická s plochou minimizující energii. Proto bubliny minimizují obsah. Například lze matematicky prokázat, že povrch s nejmenším obsahem, který obklopuje daný objem, je sféra. Proto také jsou mýdlové bubliny kulového tvaru. Mýdlová bublina obsahuje jisté pevné množství vzduchu a mýdlová blána je tak tenká (asi jednu miliontinu metru), že ji lze téměř považovat za nekonečně tenkou matematickou plochu. (Pohybující se bubliny jsou jiná věc, protože ty nutí dynamické síly k nabývání všech možných fantastických tvarů.) Existuje veliké množství aplikací minimálních ploch v biologii, chemii, krystalografii a dokonce v architektuře.

Bez dodatečných podmínek by byl plošný obsah minimální plochy vždy roven nule, což je koneckonců nejmenší obsah, jakého lze dosáhnout u *kteréhokoli* tělesa. Nejčastější podmínky, se kterými se u problémů minimální plochy lze setkat, jsou tyto: plocha musí obklopovat předem zadaný objem, hranice plochy musí ležet na dané ploše, hranicí plochy je přesně zadaná křivka, nebo nějaká jejich kombinace. Bublina vznikající například na horní ploše stolu má obvykle tvar polokoule, což je plocha s nejmenším obsahem, která obsahuje daný objem a navíc má hranici ležící v dané rovině (v tomto případě procházející horní deskou stolu).

Plateaua zajímaly zejména plochy s předem zadanou hranicí ve tvaru nějaké křivky. Ve svých pokusech využíval kousek drátku zformovaný do tvaru požadované křivky nebo případně několik takových drátků pospojovaných do rámečku jistého tvaru. Jaký je například tvar plochy s minimálním obsahem, jejíž hranice sestává ze dvou stejných „rovnoběžných" kružnic? První, co člověka napadne, je pravděpodobně válec. To ale není správná odpověď, existují lepší plochy. Leonhard Euler dokázal, že minimální plochou v tomto případě je *kočkotah* neboli *catenoid* (*obr. 35*), tedy povrch vzniklý rotací křivky tvaru U, známé jako *řetězovka,* kterou vytvoří zavěšený řetěz nebo dokonale ohebné vlákno v důsledku působení gravitace, přičemž oba jeho konce mohou a nemusí být zavěšeny ve stejné výšce, kolem osy procházející středy obou kružnic. Řetězovka vypadá jako trochu tlustší parabola. (K výrazu *catenoid* se v angličtině váže jistý vousatý matematický vtip: *Jak vznikne catenoid? Stačí zatáhnout za ocas*. Žertovný efekt je ovšem nutno umocnit správnou výslovností anglického slova catenoid, aby vynikla přítomnost kocoura v jeho úvodu.) Eulerovu větu je možno dokázat tak, že si vyrobíme dva drátěné kroužky s madélky, něco jako rámeček na rybář-

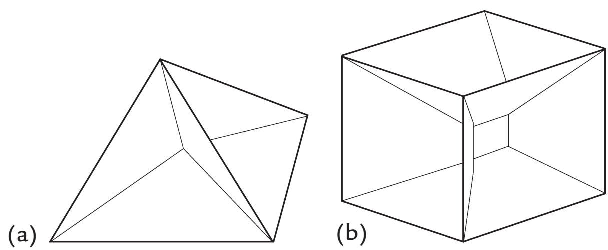


Obr. 35. Kočkotah – minimální plocha spojující dva kroužky.

skou síť. Přidržíme je těsně u sebe, ponoříme do misky s roztokem mýdla nebo jaru, vytáhneme ven a pomalu je začneme od sebe vzdalovat. Kočkotah se pak objeví v celé své namydlené kráse.

Jeden z ustálených matematických popisů mýdlových blan lze najít v klasickém díle *What Is Mathematics* (Co je to matematika?) od Richarda Couranta a Herberta Robbinse.Týká se některých původních Plateauových pokusů, při kterých nořil do roztoku drátěné rámečky ve tvaru pravidelných mnohostěnů. Nejjednodušším případem, kdy tímto tvarem je čtyřstěn, tedy útvar s čtyřmi trojúhelníkovými stěnami a šesti stejnými hranami, se ovšem nezabývali. Nejmenší obklopující plocha zde má tvar šesti trojúhelníků, které se dotýkají ve středu čtyřstěnu (*obr. 36a*). Krychlová kostra vyvolá o něco komplikovanější uspořádání sestávající ze třinácti téměř plochých povrchů (*obr. 36b*). Případ čtyřstěnu je v matematice zcela popsán, ale případ krychle zatím uniká.

Mřížka ve tvaru čtyřstěnu ilustruje dva významné obecné rysy mýdlových blan, které empiricky objevil Plateau. Podél úseček vycházejících z mřížky do středu se vždy tři a tři mýdlové blány dotýkají, a to pod úhlem 120°. Ve středu se setkávají čtyři hrany pod úhlem 109° 28′. Tyto dva úhly mají zásadní význam a objevují se všude, kde



Obr. 36. (a) Mýdlové blány na čtyřstěnu tvoří šest rovinných ploch. (b) Mýdlové blány na krychli tvoří 13 skoro rovinných ploch.

spolu hraničí několik mýdlových blan. Úhly velikosti 120° mezi stěnami a 109° 28′ mezi hranami nevznikají jen u čtyřstěnu, ale v kterémkoli uspořádání mýdlových blan, jaké si jen lze představit – tedy za předpokladu, že se nenacházejí v nějaké oblasti s nahromaděným vzduchem (pokud ano, pak je třeba předpokládat, že tlak vzduchu je z obou stran stejný, a tyto síly se tedy vzájemně vyruší).

Blány vzniklé v pěně jsou mírně zakřivené, ale lze je aproximovat plošnými stěnami. Při této aproximaci se oba zmíněné úhly objeví ve vnitřku pěny, i když nikoli u blan nacházejících se v blízkosti vnějšího povrchu. Tento fakt je základem pro kuriózní výpočet, jehož výsledkem je podivuhodné číslo, které jsme uvedli na začátku této kapitoly. Vyjdeme-li z předpokladu, že pěna je tvořena mnoha stejnými mnohostěny, jejichž stěny jsou pravidelné mnohoúhelníky s úhly 109° 28′, tedy (což sice není možné, ale kdo by se tím zdržoval) můžeme odhadnout průměrné počty vrcholů, hran a stěn v pěně (viz výsledky v tabulce).

Plateauova pozorování týkající se úhlu 120° byla vzápětí prokázána matematicky. Důkaz se často přisuzuje velkému geometrovi Jacobu Steinerovi (1837), ale ve skutečnosti jej o mnoho let předběhli Evangelista Torricelli a Francesco Cavalieri v roce 1640. Všichni tito matematikové ve skutečnosti studovali analogický problém pro trojúhelníky. Je-li zadán trojúhelník a v něm bod, načrtněte tři úsečky spojující daný bod s vrcholy trojúhelníka a sečtěte jejich délky. Pro který bod je tato hodnota nejmenší? Odpověď: je to ten bod, ve kterém se zmíněné tři úsečky potkávají pod úhlem 120°. (Samozřejmě za předpokladu, že žádný z úhlů trojúhelníka není větší než 120°, jinak je tímto bodem příslušný vrchol.) Problém mýdlových blan je možno zredukovat na problém trojúhelníků pomocí řezu blány vhodnou rovinou.

MIMOŘÁDNĚ MAZANÁ PĚNA

Předpokládejme, že bubliny v pěně tvoří pravidelné mnohostěny, jejichž stěny jsou pravidelné mnohoúhelníky o *n* stranách a všechny úhly mezi těmito stěnami jsou rovny $A = 109° \, 28'$. Žádné takové objekty sice ve skutečnosti neexistují, ale my zde budeme předpokládat, že ano, a vytvoříme si o nich jakousi mlhavou představu. Budeme je nazývat „mlhostěny“. Nechť má daný mlhostěn *V* vrcholů, *S* stěn a *H* hran.

Je známo, že má-li pravidelný mnohoúhelník *n* stran, potkávajících se pod úhlem *A* (měřeno ve stupních), pak nutně $n = 360/(180 - A)$. Je-li například úhel *A* pravý, pak $n = 4$, tedy jde o čtverec, jak bylo možno uhodnout. Důvodem je, že *n* vnitřních úhlů velikosti $180 - A$ musí dohromady dát 360°. Pro $A = 109° \, 28'$ vychází $n = 5{,}104$ stran.

Nyní se naše výpočty trochu zkomplikují. V každém vrcholu našeho mlhostěnu se setkávají tři stěny, neboť *A* je větší než 90°, ale menší než 120°. Takže celkový úhel u každého vrcholu činí $3A$. Posčítáme-li tyto hodnoty přes všechny vrcholy, dostaneme celkový vnitřní úhel $3VA$. Avšak stejnou hodnotu obdržíme, jestliže budeme sčítat přes všechny stěny, z nichž každá přispívá do celkového úhlu hodnotou nA. Takže $3VA = nSA$, neboli $3V = nS = 5{,}103S$, pročež

(1) $V = 1{,}701S$.

Nyní si představme *H* hran. Každá strana má *n* hran, což celkem dává nS hran. Ale každá hrana je společná pro dvě stěny, takže vlastně

(2) $H = nF/2 = 2{,}552F$.

Nakonec si vzpomeneme na slavný Eulerův vzorec

(3) $S + V - H = 2$,

který platí pro libovolný mnohostěn. Pomocí (1) a (2) nahradíme *V* a *H* v (3) násobky *S* a dostaneme

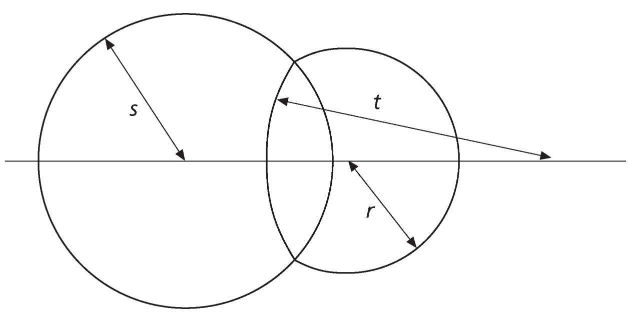
$S + 1{,}701S - 2{,}552S = 2$, odkud vypočítáme

$S = 13{,}42$, $V = 22{,}83$ a $H = 34{,}25$.

V roce 1976 dokázali Frederick Almgren a Jean Taylor druhé Plateauovo pravidlo týkající se úhlu 109° 28′. Jejich vynalézavý důkaz probíhal v několika krocích. Nejprve posoudili každý vrchol, v němž se střetává šest stran a čtyři společné hrany. Dokázali, že drobné zakřivení, které se u většiny mýdlových blan objevuje, je možno zanedbat, a blány je možno považovat za plošné. Pak zaměřili svou pozornost na soustavu kruhových oblouků vytvořených průniky těchto rovin s malými sférami se středem v daném vrcholu. Protože mýdlové blány tvoří minimální plochy, jsou tyto oblouky „minimálními křivkami“ – jejich celková délka je nejmenší možná. Pomocí sférické analogie Torricelliovy-Cavalieriovy věty se musí tyto oblouky setkávat vždy po trojicích, a to pod úhlem 120°. Almgren a Taylor dokázali, že tuto podmínku splňuje přesně deset různých konfigurací oblouků – jsou poněkud složité, proto je zde neuvádíme. Pro každý z možných případů si položili otázku, zda by bylo možno ještě zmenšit celkovou plochu všech blan nacházejících se uvnitř sféry tak, že bychom jednotlivé povrchy mírně deformovali, například přidáním nových kousků blan. Všechny tyto případy by pak bylo možné zanedbat, neboť by neodpovídaly minimální ploše. Tuto proceduru přežily přesně tři případy. Odpovídající uspořádání jsou: jedna blána, tři blány setkávající se pod úhly 120° a konečně šest blan setkávajících se pod úhly 109° 28′, tedy přesně tak, jak vypozoroval Plateau. Podrobné matematické metody potřebné pro tento proces překročily hranice geometrie a patří spíše do analýzy, tedy kalkulu, a jejích esoteričtějších ratolestí. Almgren a Taylor využili abstraktního konceptu zvaného „teorie míry“, aby mohli do svých úvah zahrnout mnohem složitější tvary bublin než hladké plochy.

Pravidlo týkající se 120° odhaluje nádhernou vlastnost dvou přilehlých bublin. Již dlouhou dobu převládá názor, vytvořený na empirickém základě, že když se dvě bubliny nalepí na sebe, vzniknou tři sférické plochy, uspořádané podle obrázku 37. Je-li tomu opravdu tak, pak mezi poloměry sférických ploch musí platit překrásný vztah. Označme poloměry dvou bublin r a s a dále označme t poloměr plochy, podél které se setkávají. Pak platí $1/r = 1/s + 1/t$. Tento vzorec dokázal Cyril Isenberg ve své knize *The Science of Soap Films and Soap Bubbles* (Vědecké pojednání o mýdlových blánách a mýdlových bublinách), přičemž nevyužil nic jiného než elementární geometrii a pravidlo o 120°.

Zbývá jediné: dokázat, že plochy jsou částmi sfér. A právě tento zdánlivě snadný krok způsobuje největší potíže. V roce 1995 získali důkaz Joel Hass z University of California v Davisu a Roger Schlafly z Real Software v Santa Cruz, ale pouze pro bubliny stejného objemu. Jejich důkaz si vyžádal pomoc počítače, který byl donucen spočítat 200 260 integrálů spojených s různými možnostmi. Úkol zabral stroji pouhých dvacet minut.



Obr. 37. Domnělá geometrie zdvojené bubliny na bokorysu. Rotací čar kolem vodorovné osy dostaneme plochy. Poloměry r, s, t splňují rovnici $1/t = 1/s + 1/t$.

Vědci se museli škrábat na hlavě ještě dlouhých pět let, než se objevilo kýžené úplné řešení. V roce 2000 byla konečně domněnka dokázána i pro bubliny s nestejným objemem, a to přičiněním Michaela Hutchingse (tehdy ze Stanfordu, nyní z Berkeley), Franka Morgana z Williams College, Manuela Rotiré z Granady a Antonia Rosy též z Granady.

Díky bublinám stále vznikají nové a podnětné matematické problémy. V současné době je k dispozici mnohem více poznatků, než měl Plateau, když poprvé zanořil své drátky do mazlavé vody. Neměli bychom zapomenout, že to byly právě jeho experimenty, které vytvořily překrásnou oblast matematiky – geometrii minimálních ploch.