Kapitola 5

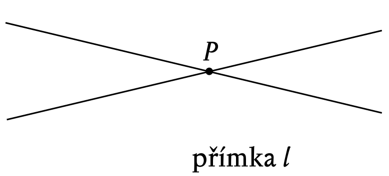
# Překvapivé výsledky hyperbolické geometrie

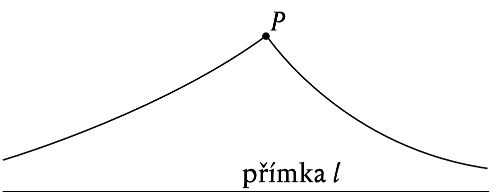
Doposud jsme se zabývali pouze teoretickými základy nejvýznamnějších neeukleidovských geometrií a představili jsme si přitom jejich objevitele a okolnosti jejich vzniku. Nyní se podrobněji podíváme na matematické důsledky odmítnutí pátého Eukleidova postulátu.

Pro začátek shrneme Bolyaiovy a Lobačevského poznatky, abychom se seznámili s chováním jejich geometrie, ale nebudeme se při tom zatěžovat úplným výčtem jejich argumentů a teorémů.

Nejpřevratnějším výsledkem hyperbolické geometrie je změna tradičního vnímání prostoru. Veškeré grafy a nákresy mají jako obvykle pouze pomocnou funkci a v matematických důkazech nehrají žádnou roli, přesto však jsou nepostradatelné pro pochopení obrovského skoku od eukleidovské geometrie k hyperbolické.

Jak už dobře víme, hyperbolická geometrie je neeukleidovský systém, který pátý postulát nahrazuje tímto tvrzením: „Bodem *P*, který neleží na přímce *l*, mohou procházet alespoň dvě různé rovnoběžky k *l*.“ Tento tzv. hyperbolický postulát rovnoběžek lze znázornit dvěma různými způsoby, které se oba běžně používají:

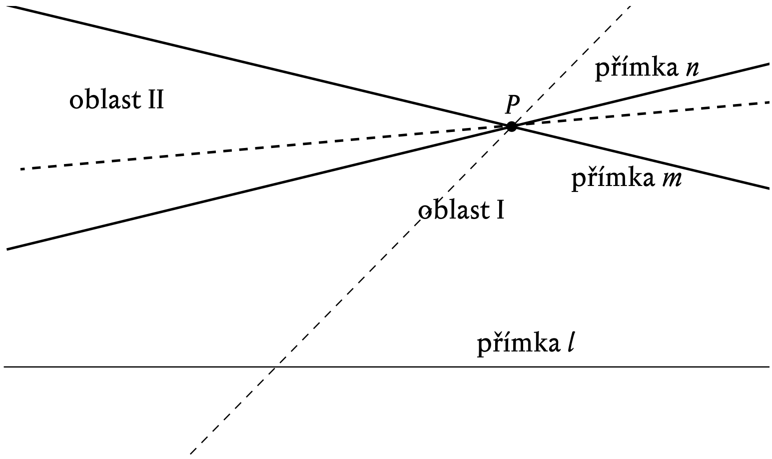


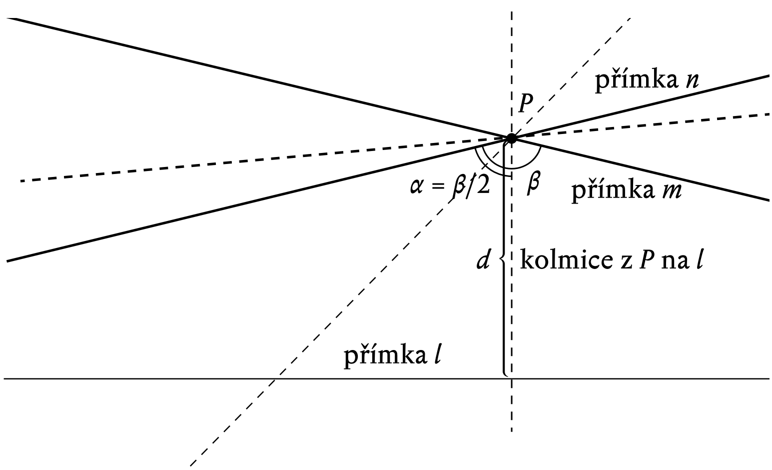

Z této hypotézy lze odvodit různé koncepty, které popisují hyperbolický prostor. Začneme se základní větou.

## Hraniční úhel rovnoběžek a přímek

Základní věta hyperbolické geometrie se zabývá hraničním úhlem rovnoběžek a přímek. Při vysvětlování začneme následujícím náčrtkem:




Bodem *P*, který neleží na přímce *l*, procházejí právě dvě přímky *m* a *n* rovnoběžné k *l* (takzvané *hraniční přímky*), které vymezují dvě oblasti (I a II). Všechny přímky v oblasti I protínají přímku *l* (jsou to tedy vzhledem k *l* různoběžky) a naopak v oblasti II žádné přímky přímku *l* neprotínají (jsou to vzhledem k *l* rovnoběžky). Z toho vyplývá, že bodem *P* prochází nekonečně mnoho rovnoběžek.



Jak je vidět na předchozím obrázku, přímky $m$ a $n$ v oblasti I svírají úhel $\beta$, který je menší než 180°.

Hodnota $\alpha = \beta/2$ se nazývá úhel rovnoběžnosti. Všimněte si, že úhel $\alpha$ je ostrý (tedy menší než pravý). To je důležité, protože v eukleidovské geometrii je tento úhel vždy pravý.

Na druhém obrázku je také znázorněna kolmice z bodu $P$ na přímku $l$ a vzdálenost mezi $P$ a $l$ je označena jako $d$. Vidíme, že velikost $\alpha$ závisí na $d$ takto (nezapomeňte, že se nejedná o plochý povrch):

1. Když se $d$ zmenšuje, $\alpha$ se blíží k 90° (pravému úhlu).
2. Když se $d$ zvětšuje, $\alpha$ se blíží k 0°.

Pro názornost si můžeme představit $P$ jako objekt připevněný gumičkou kolmo k přímce $l$. Když se $P$ pohybuje nahoru (tedy roste hodnota $d$), úhel rovnoběžnosti se zmenšuje – a naopak.

Existuje konstanta $k$, která závisí na jednotkách délky použitých pro $d$ a objevuje se v následujícím výrazu:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \mathrm{e}^{-d/k}.$$

K výše uvedené závislosti můžeme dojít i jiným způsobem. Když se hodnota $d$ zvyšuje, pravá strana rovnice se blíží nule, takže se blíží nule i hodnota $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha$, což znamená, že $\alpha$ je téměř 0.

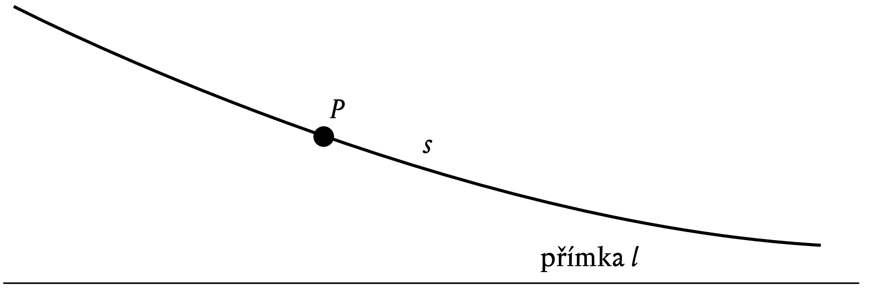
Když je naopak hodnota $d$ velmi malá, $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha$ se blíží 1, takže $\frac{1}{2}\alpha \approx \operatorname{tg}\frac{1}{4}\pi$ radiánů (více v kapitole 6), což znamená, že $\alpha$ se blíží k $\frac{1}{2}\pi$ radiánů (neboli 90°, tedy pravému úhlu).

V eukleidovské geometrii se při změně vzdálenosti úhly tímto způsobem nemění, v hyperbolické geometrii je však tomu jinak – velikost úhlu vždy závisí na hodnotě $d$.

## Ekvidistantní křivky

V eukleidovské geometrii je vzdálenost mezi jakýmkoliv bodem na přímce $s$ a rovnoběžnou přímkou $l$ vždy stejná. Už asi tušíme, že v hyperbolické geometrii to tak úplně neplatí.

Uvažujme přímku $l$ a přímku $s$, která je k ní rovnoběžná. Pak si zvolme libovolný bod $P$ ležící na $s$, jako na obrázku:




Vidíme, že když se $P$ posouvá doprava, jeho vzdálenost k přímce $l$ se zmenšuje. Matematik by řekl, že se tato vzdálenost blíží k nule.

Můžeme také říct, že přímka $l$ je asymptotou přímky $s$. Když se $P$ naopak posouvá doleva, jeho vzdálenost od $l$ se zvětšuje – říkáme, že $l$ a $s$ divergují.

V hyperbolické geometrii tedy pro rovnoběžné přímky nemusí platit, že od sebe mají v každém bodě stejnou vzdálenost – to by porušovalo pátý postulát hyperbolické geometrie. Pro čáru, která si udržuje konstantní vzdálenost od jiné přímky, se proto používá termín *ekvidistantní křivka*.

## Pythagoras, trojúhelníky a délky

Nyní se podíváme na problémy, které se týkají trojúhelníků a kružnic a vztahů mezi jejich obvodem a obsahem. Mimo jiné si na známých středoškolských příkladech ukážeme, jak v hyperbolické geometrii vypadá Pythagorova věta.

### Trojúhelníky

Vzorec pro obsah je v eukleidovské geometrii pro všechny trojúhelníky stejný: $P = \frac{1}{2} z \times v$, tedy základna krát výška děleno dvěma. Jeho všeobecná platnost vychází z faktu, že součet vnitřních úhlů je vždy 180°.

Nejpodivnější vlastností trojúhelníka v hyperbolické geometrii je vztah mezi vzorcem pro obsah a součtem vnitřních úhlů. Jak už víme, v hyperbolické geometrii je součet vnitřních úhlů trojúhelníka vždy menší než 180°. To také znamená, že součet vnitřních úhlů čtyřúhelníka musí být vždy menší než 360°.

V eukleidovské geometrii platí, že pokud jsou úhly $\alpha$, $\beta$ a $\gamma$ jednoho trojúhelníka stejně velké jako úhly $\alpha'$, $\beta'$ a $\gamma'$ druhého trojúhelníka, pak jsou si tyto trojúhelníky „podobné“, což však neznamená, že jsou jejich strany stejně dlouhé, protože se mohou lišit velikostí. V hyperbolické geometrii ale platí, že dva podobné trojúhelníky jsou vždy stejně velké.

Podívejme se podrobněji na důkaz tohoto tvrzení. Uvažujme trojúhelník s úhly $\alpha$, $\beta$ a $\gamma$. Jejich součet je menší než dva pravé úhly (180°), takže hodnota $180° - (\alpha + \beta + \gamma)$ bude určitě kladná. Toto číslo se nazývá reziduum a je přímo úměrné obsahu trojúhelníka.

Pro každé zakřivení hyperbolické plochy existuje konstanta $k$ (zvaná *koeficient úměrnosti*) taková, že obsah každého trojúhelníka na této ploše určuje následující vzorec:

$$\text{obsah} = \frac{\pi}{180°} \times k^2 \times (180° - (\alpha + \beta + \gamma)),$$

takže maximální obsah jakéhokoliv trojúhelníka je $\pi \times k^2$. (Trojúhelníky s neomezeně velkým obsahem nejsou v hyperbolické geometrii možné.) Důkaz zde neuvádíme, protože je velice složitý a zdlouhavý – i když se vám to možná nezamlouvá, budete tuto rovnici muset přijmout jako fakt.

Vzorec pro výpočet obsahu trojúhelníka potvrzuje výše uvedené tvrzení, že na rozdíl od eukleidovské geometrie (kde dva trojúhelníky se stejně velkými úhly nemusejí mít stejný obsah a nemusejí být tedy shodné) znamenají v hyperbolickém světě shodné úhly (a tím pádem i shodné reziduum) shodnou velikost.

Povšimněme si také, že čím je trojúhelník v hyperbolické geometrii větší, tím má větší obsah a menší úhly, ale že ve velice malých (řečeno matematickou terminologií „infinitezimálních“) měřítkách se součet vnitřních úhlů trojúhelníka přibližně rovná 180°. Lze tedy říct, že eukleidovská geometrie je limitním případem hyperbolické geometrie.

Johann Heinrich Lambert, o němž jsme se již zmínili v kapitole 3, už v polovině 18. století zaznamenal, že pokud odmítneme pátý Eukleidův postulát, bude se součet vnitřních úhlů trojúhelníka se zmenšujícím obsahem zvětšovat a přibližovat 180°.

## Kružnice

Výuka základů geometrie po celém světě se neomezuje pouze na trojúhelníky – do osnov patří také kružnice a každý, kdo chodil do školy, ví, co je to poloměr. Eukleidovský zákon říká, že obvod je přímo úměrný poloměru $r$. Jejich vztah popisuje vzorec, který obsahuje další slavnou matematickou konstantu – $\pi$:

$$\text{obvod} = 2\pi r.$$

V hyperbolické geometrii však k výpočtu obvodu slouží tento vzorec:

$$\text{obvod} = k\pi\left(e^{r/k} - e^{-r/k}\right) = k\pi\left(2\sinh\frac{r}{k}\right),$$

kde $k$ je koeficient úměrnosti a sinh je takzvaný hyperbolický sinus. Číslo e je další dobře známá konstanta, jejíž desetinný rozvoj začíná 2,718 281 828… K dalšímu postupu budeme potřebovat definici hyperbolického sinu:

$$\sinh\alpha = \frac{e^{\alpha} - e^{-\alpha}}{2}.$$

Když v předchozím vzorci

$$\text{obvod} = k\pi\left(e^{r/k} - e^{-r/k}\right) = k\pi \times 2\sinh\frac{r}{k}$$

nahradíme funkci sinh jejím Taylorovým rozvojem, dostaneme následující rovnici:

$$\text{obvod} = k\pi\left(e^{r/k} - e^{-r/k}\right) = 2\pi r\left(1 + \frac{1}{6}\frac{r^2}{k^2} + \frac{1}{120}\frac{r^4}{k^4} + \dots\right),$$

která obvod vyjadřuje jako součet nekonečné řady.

Když se podrobněji podíváme na poslední člen této rovnice, zjistíme, že když je $r$ velmi malé, výraz $\left(1 + \frac{1}{6}r^2/k^2 + \dots\right)$ se blíží 1, takže celou rovnici lze zjednodušit na dobře známý vzorec pro obvod v eukleidovské geometrii:

$$\text{obvod} = 2\pi r.$$

Přesnost tohoto zjednodušení si můžeme ukázat na velmi jednoduchém příkladu. Pro usnadnění výpočtu budeme měřit vzdálenosti v kilometrech. Budeme počítat obvod kružnice o poloměru 100 km s koeficientem úměrnosti $k = 10^6$. Po dosazení do vzorce s Taylorovým rozvojem:

$$\text{obvod} = 2\pi r\left(1 + \frac{1}{6}\frac{r^2}{k^2} + \dots\right)$$

a do eukleidovského vzorce „obvod = $2\pi r$“ zjistíme, že chyba jednoduššího vzorce je pouze $10^{-9}$. Pro poloměr 1 km je chyba ještě menší – pouze v řádu $10^{-13}$. Když budeme kružnici dále zmenšovat, bude se zmenšovat i chyba: pro poloměr 1 m je chyba přibližně $10^{-19}$. Z toho vyplývá, že pro malé rozměry lze vzorec pro obvod v hyperbolické geometrii aproximovat vzorcem z eukleidovské geometrie. Tento typ důkazu můžeme použít i u vzorce pro obsah trojúhelníka.