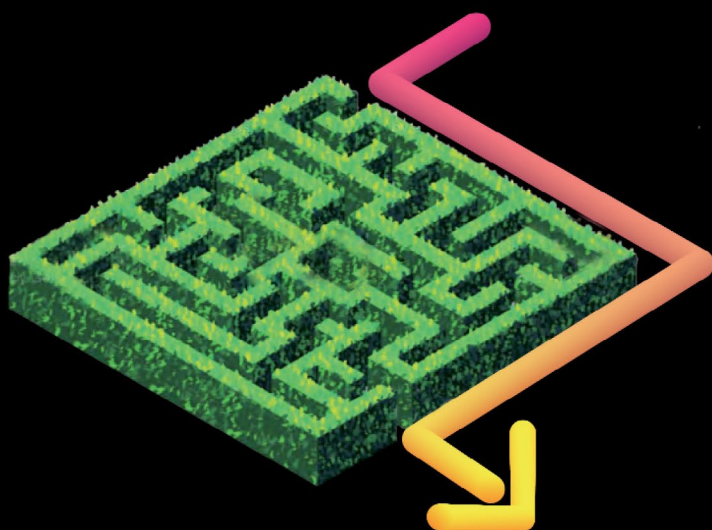


Marcus du Sautoy

UMĚNÍ ZKRATKY

Jak lépe myslet



argo / dokořán

Marcus du Sautoy

UMĚNÍ ZKRATKY

Jak lépe myslet

ARGO / DOKOŘÁN

Marcus du Sautoy
UMĚNÍ ZKRATKY
Jak lépe myslet

Copyright © Marcus du Sautoy 2021

Translation © Petr Holčák, 2023

Všechna práva vyhrazena. Žádná část této publikace nesmí být rozmnožována a rozšiřována jakýmkoli způsobem bez předchozího písemného svolení nakladatele.

Druhé vydání v českém jazyce (první elektronické).

Z anglického originálu *Thinking Better: The Art of the Shortcut* přeložil Petr Holčák.

Odpovědný redaktor Zdeněk Kárník.

Redakce Klára Soukupová.

Obálka a sazba podle návrhu Pavla Růta
a konverze do elektronické verze Michal Puhač.

Vydalo v roce 2025 nakladatelství Dokořán, s. r. o.,
Holečkova 9, Praha 5,
dokoran@dokoran.cz, www.dokoran.cz,
jako svou 1 327. publikaci (458. elektronická).

ISBN 978-80-7675-237-5

Všem učitelům matematiky, zejména panu Bailsonovi,
který mi jako první ukázal matematickou zkratku.

OBSAH

	Vyrážíme na cestu	9
1. ZKRATKA:	Vzorec	21
	Zastávka: Hudba	41
2. ZKRATKA:	Počítání	45
	Zastávka: Startup	61
3. ZKRATKA:	Jazyk	65
	Zastávka: Paměť	83
4. ZKRATKA:	Geometrie	87
	Zastávka: Výstup na horu	105
5. ZKRATKA:	Diagram	111
	Zastávka: Ekonomie	131
6. ZKRATKA:	Kalkulus	137
	Zastávka: Umění	157
7. ZKRATKA:	Data	163
	Zastávka: Terapie	179
8. ZKRATKA:	Pravděpodobnost	185
	Zastávka: Finance	201
9. ZKRATKA:	Sítě	205
	Zastávka: Neurověda	221
10.	Když je zkratka nemožná	225
	V cíli cesty	247
	<i>Poděkování</i>	251
	<i>Rejstřík</i>	253

VYRÁŽÍME NA CESTU

Vydali jsme se na cestu a máme před sebou dvě možnosti. Půjdeme-li obvyklou trasou, čeká nás úmorné trmácení a nenarazíme na žádné hezké vyhlídky. Cesta nám bude trvat celou věčnost, budeme dočista vyčerpaní, nakonec se ale dopotácíme do cíle. Existuje ale i druhá trasa. Budeme-li pozorní, zahlédneme ji, jak uhýbá od hlavní stezky a zdánlivě se od cíle vzdaluje. Pak si všimneme ukazatele s nápisem „zkratka“. Slibuje nám to rychlejší postup mimo hlavní trasu, jímž cíle dosáhneme dříve, a přitom s mnohem menší námahou. Tato druhá trasa dokonce nabízí úchvatné pohledy do krajiny. Je na ní jen zapotřebí zůstat ve střehu, abychom nesešli ze správné cesty. Je to na nás. Tato kniha chce čtenáře nasměrovat právě touto druhou cestou. Měla by se jim stát zkratkou k jednoduššímu myšlení, které jim pomůže proplést se nástrahami neobvyklé stezky a dostat se úspěšně k cíli.

Právě lákadlo takové zkratky ve mně probudilo touhu stát se matematikem. Jako vcelku líného mladíka mě vždy zajímalo, jak dosáhnout cíle co nejeftivnějším možným způsobem. Nebylo to tak, že bych se chtěl životem proflákat. Chtěl jsem jen dosáhnout svého cíle s co nejmenší námahou. Když mi tedy učitel matematiky pan Bailson v mých dvanácti ukázal, že předmět, který vyučuje, je ve skutečnosti oslavou zkratky, nastražil jsem uši. Začalo to prostým příběhem o devítiletém chlapci jménem Carl Friedrich Gauss. Učitel nás v něm přenesl do roku 1786 a do školní třídy v dolnosaském městě Braunschweigu, kde Gauss vyrůstal. Bylo to malé městečko a jediný učitel místní školy, jistý pan Büttner, se musel v jedné třídě postarat o výuku stovky místních dětí.

Náš pan učitel byl mrzutý Skot, který si zakládal na přísné disciplíně, ve srovnání s Herr Büttnerem však byl hotové dobračisko. Gaussův učitel hrozivě kráčel mezi lavicemi a pořádek mezi zlobivými žáky si vynucoval rákoskou. Samotná Büttnerova třída, kterou jsem později v rámci svého putování po místech spjatých s matematikou navštívil, byla pochmurná a tmavá místnost s nízkým stropem a nerovnou podlahou. Vypadalo to tam jako ve středověkém žaláři a tomu podle všeho odpovídal i jeho režim výuky.

Vypráví se, že jednou při hodině počtů Büttner zadal třídě velmi úmorný úkol, kterým chtěl žáky na nějakou dobu zaměstnat, aby si mohl zdřímnout. „Žáci... chci, abyste na svých psacích tabulkách sečetli čísla od 1 do 100,“ nařídil žákům. „Jakmile budete hotovi, přinesete tabulky na stůl.“

Než to učitel dořekl, Gauss už byl na nohou, došel ke stolu, položil na něj svou tabulku a dolnoněmecky pronesl: „*Ligget se.*“ – „Tady to je.“ Büttner se na chlapce nevěřičně podíval, šokován jeho drzostí. Rákoska v jeho ruce se rozkmitala, učitel se ale rozhodl, že s výpraskem malého Gausse počká, až mu tabulky předloží ke kontrole i ostatní žáci. Zbytek třídy nakonec úkol dokončil a na Büttnerově stole se navršila věž z tabulek plných křídou psaných výpočtů. Učitel se dal do jejich kontrolování a začal tabulkou, která ležela nejvýše. Většina výpočtů byla chybná, protože žáci se během dlouhého počítání vždy někde spletli.

Nakonec se Büttner propracoval ke Gaussově tabulce. Už se chystal mladého chytráka seřvat, když ale břídlícovou tabulku otočil, uviděl správnou odpověď: 5 050. Nikde přitom nebyly vidět žádné pomocné výpočty. Büttner byl v šoku. Jak mohl tak malý kluk dojít tak rychle ke správnému výsledku?

Uvádí se, že předčasně vyspělý žák si povšiml zkratky, která mu pomohla vyhnout se úmornému počítání. Uvědomil si totiž, že když se sečtou všechna čísla v protilehlých párech:

$$\begin{aligned} 1 + 100, \\ 2 + 99, \\ 3 + 98, \\ \dots, \end{aligned}$$

je výsledek vždy 101. Těchto párů je přitom 50. Řešení tudíž zní

$$50 \times 101 = 5\,050.$$

Vzpomínám si, jak mě to vyprávění uchvátilo. Způsob, jímž se Gaussovi podařilo zkrátit si celý zdoluhavý a pracný výpočetní postup, byl pro mě učiněným zjevením.

Přestože je historka o školáku Gaussovi nejspíš legendou, nádherně vystihuje jednu důležitou věc: matematika je obor, jehož podstatou není úmorné počítání, ale strategické myšlení.

„Toto, milí žáci, je matematika,“ prohlásil náš učitel na závěr svého vyprávění. „Umění zkratky.“

Vítej, myšlenko z doby, kdy mi bylo dvanáct... pověz mi víc!

JAK SE RYCHLEJI DOSTAT DÁL

Zkratky používáme neustále. Musíme. Na rozhodování totiž máme obvykle jen krátkou dobu. Musíme se vyrovnávat se složitými problémy a máme na to jen omezené duševní schopnosti. Jednou z prvních strategií, které jsme si vyvinuli

pro řešení komplikovaných úkolů, byla heuristika: postup, který zjednodušuje problémy tím, že vědomě či nevědomě ignoruje některé informace, jež náš mozek dostává.

Potíž je v tom, že heuristika, jak ji lidé běžně používají, většinou vede ke špatným úsudkům a předpojatým rozhodnutím, a k řešení složitých úkolů proto obvykle není vhodná. Z vlastní zkušenosti třeba něco víme a takto získanou znalost pak vztahujeme na všechny ostatní problémy, s nimiž se setkáme. Známe to lokální a z jeho hlediska posuzujeme to globální. To mohlo fungovat vcelku dobře, dokud naše okolní prostředí nesahalo příliš daleko za horizont malého kusu savany, který jsme obývali. Jakmile se ale naše okolí rozšířilo, tyto způsoby heuristického uvažování přestaly být vhodným prostředkem ke smysluplnému porozumění tomu, co naše místní znalosti přesahuje. To byla chvíle, kdy jsme si začali vyvíjet důvtipnější zkratky. Takovým nástrojům dnes říkáme matematika.

Máme-li podobné zkratky nalézt, musíme být schopni vymanit se z geografie, v níž se pohybujeme. Pohybujeme-li se ve volné krajině, můžeme se často opřít o to, co vidíme kolem sebe. Přestože ale máme pocit, že každý náš krok vede správným směrem, výsledná trasa může znamenat dlouhou okliku k cíli, nebo nás může svést z cesty úplně. Lidé si proto vyvinuli lepší způsoby usuzování: využili schopnosti odhlížet od detailů aktuálně vykonávaného úkolu a díky tomu zjistili, že mohou existovat nečekané stezky, jimiž se lze dostat k cíli s vynaložením menší námahy, a přitom rychleji.

Právě to udělal Gauss, když učitel zadal třídě svůj úkol. Zatímco ostatní žáci se pustili do zdoluhavého přičítání jednoho čísla ke druhému, Gauss uviděl problém v jeho celku a pochopil, jak využít k jeho vyřešení začátek a konec celé cesty.

Celá matematika se zakládá na využití této schopnosti uvažovat na vyšší úrovni tam, kde napohled vidíme jen náhodně se proplétající pěšiny. Jde o to, pozvednout se nad krajinu tak, abychom na ni hleděli z velké výšky a spatřili její celkovou podobu. Jestliže takto přistupujeme k problémům, objeví se zkratky. Jakmile jsme začali využívat vlohy spatřit vnitřním zrakem strukturu, aniž bychom se s ní fyzicky setkali, uvolnila tato schopnost abstraktního myšlení cestu k mimořádnému a staletí trvajícímu pokroku lidské civilizace.

Cesta k efektivnějšímu uvažování započala před pěti tisíci lety v oblastech kolem řek Nil a Euphrat. Lidé si tam chtěli osvojit důmyslnější způsoby budování městských států, které začaly kolem těchto řek vznikat. Kolik kamenných kvádrů je zapotřebí k postavení pyramidy? Jakou rozlohu půdy je nutné obdělávat, má-li uživit město? Jaké změny ve stavu říční hladiny jsou ukazateli blížící se záplavy? Ti, kdo disponovali nástroji pro nacházení zkratk k řešení těchto úkolů, byli také těmi, kteří v těchto nově vznikajících společnostech získali přední pozice. Úspěch matematiky jako zkratky k rychlému rozvoji těchto civilizací učinil z tohoto oboru mocnou páku pro všechny, kteří si přáli dostat se rychleji dál.

Matematické objevy pak opakovaně vedly k urychlování civilizačního rozvoje. Exploze matematického zkoumání od dob renesance, která přinesla takové objevy jako infinitezimální počet čili kalkulus, zajistila dosud nevidané zkratky k účinným technickým řešením. Dnes pak stojí matematika za všemi algoritmy, s jejichž pomocí nás počítače provádějí digitální džungli a doslova nám zkracují cestu při hledání optimální přepravní trasy, nejlepších webových stránek při internetovém vyhledávání, a dokonce i k nejlepším partnerům pro cestu životem.

Zajímavé ovšem je, že lidé nebyli první, kdo začal schopnosti matematiky najít nejlepší cestu ke zvládnutí daného úkolu využívat. Příroda používala matematické zkratky k řešení problémů dávno předtím, než jsme na scénu přišli my. Mnohé fyzikální zákony jsou založeny na tom, že příroda si vždy najde optimální zkratku. Světlo cestuje po dráze, po níž se dostane k cíli nejrychleji, i kdyby to znamenalo, že se přitom musí ohýbat kolem velkých objektů, jako je Slunce. Mýdlové bubliny vytvářejí tvary, které odpovídají nejnižší vynaložené energii: většinou je to povrch koule čili sféra, protože tento symetrický tvar má nejmenší povrchovou plochu, a ke svému udržení tak potřebuje nejméně energie. Včely staví šestiúhelníkové plástve, které k udržení svého tvaru spotřebují nejméně vosku. Naše těla si v podobě chůze sama našla energeticky nejefektivnější způsob přepravy z bodu A do bodu B.

Příroda je stejně jako lidé líná, takže hledá řešení vyžadující co nejméně energie. Jak to vyjádřil v 18. století francouzský matematik Pierre Louis Maupertuis: „Příroda je úsporná ve všech svých procesech.“ Také proto je mimořádně dobrá v objevování zkratek. Má to vždy své matematické opodstatnění. A naše objevy zkratek se často zakládají na pozorování toho, jak daný problém řeší příroda.

CESTA PŘED NÁMI

Tato kniha se chce podělit o arzenál zkratek, který během staletí vyvinuli matematici v čele s Carlem Friedrichem Gaussem. Každá z kapitol představí jiný druh zkratek, které mají odlišné vlastnosti. Cílem všech nicméně je, aby čtenář přestal být někým, kdo se musí při řešení problému těžce dřít, a stal se tím, kdo bude moci svou tabulku odevzdat před všemi ostatními.

Za svého společníka při putování po zkratkách jsem si vybral Gausse. Díky úspěšnému řešení školního úkolu odstartoval životní dráhu, již se v mých očích stal knížetem zkratky. Mezi velkým počtem objevů, které během svého života učinil, je i řada zkratek, které si zde probereme.

Rád bych, aby se tato kniha stala – prostřednictvím příběhů o zkratkách, které matematici během doby nashromáždili – pracovní soupravou pro všechny, kdo chtějí ušetřit čas při vykonávání jedné činnosti a uspořené chvíle věnovat

něčemu zajímavějšímu. Našimi zkratkami lze velmi často řešit i problémy, jejichž povaha nemá na první pohled s matematikou nic společného. Matematika je ale přístup, s jehož pomocí se dokážeme vyznat ve složitém světě a najít si v něm správnou cestu k cíli.

Proto si také matematika zaslouhuje své místo mezi základními předměty, jimž se učí na našich školách. Nikoli proto, že by snad bylo naprosto nezbytné, aby občané věděli, jak řešit kvadratickou rovnici. Upřímně řečeno, kdy vlastně člověk takovou věc potřebuje znát? Tím, co je při řešení problémů podstatné, je pochopit moc, jíž algebra a algoritmy disponují.

Naši cestu za efektivnějším myšlením začneme jednou z nejmocnějších zkratek, které kdy matematici vyvinuli: odhalením řádu v chování daného objektu. Tomuto řádu budeme říkat *vzorec*. Takový vzorec často bývá tím nejlepším druhem zkratky. Odhalíme-li vzorec, našli jsme zkratku, která ukazuje, jak budou data pokračovat dál. Tato schopnost identifikovat podstatné pravidlo je základem matematického modelování.

Rolí zkratky často bývá určit základní princip, který sjednocuje celou paletu řešení zdánlivě nesouvisejících problémů. Krása Gaussovy zkratky tkví v tom, že i kdyby učitel úkol ztížil a zadal v něm sečtení čísel do jednoho tisíce nebo milionu, stále by řešení fungovalo stejně. Zatímco přičítání jednoho čísla po druhém by v takovém případě bylo časově mnohem náročnější, na Gaussův trik by to žádný vliv nemělo: kdybychom měli sečíst všechna čísla do jednoho milionu, jen bychom je spojili do 500 000 párů, z nichž každý by měl součet 1 000 001. Obě tato čísla pak už jen vzájemně vynásobíme a hle – máme řešení. Je to jako tunel, který nám umožňuje zkrátit si cestu přes horu: i kdyby byla hora dvakrát vyšší, délku zkratky by to nijak neovlivnilo.

Vysoce účinnou zkratkou je také schopnost vytvářet a měnit různé jazyky. Jazyk algebry nám pomáhá rozpoznávat principy, na nichž je založeno řešení celé řady zdánlivě rozdílných problémů. Jazyk souřadnic převádí geometrii na čísla, díky nimž často uvidíme zkratky, které jsme v geometrickém vyjádření nespatriili. Vytvoření vhodného jazyka může být úžasným nástrojem k porozumění problému. Vzpomínám si, jak jsem jednou zápasil s neobyčejně složitým matematickým systémem, k jehož určení byla zapotřebí celá řada podmínek. Když mi vedoucí mé disertace poradil, „dej tomu jméno“, bylo to pro mě osvobozující zjevení. Pomohlo mi to mé uvažování podstatně zkrátit.

Vždy, když řeknu slovo zkratka, lidé si myslí, že se pokouším nějakým způsobem podvádět. Zní jim to, jako kdybych chtěl něco ošidit a spokojit se se snadným, ale nepřesným řešením; proto je důležité, abychom si hned na začátku zdůraznili, jaký je mezi oběma těmito přístupy rozdíl. Já usiluji vždy o chytřejší cestu ke správnému řešení. Nezajímají mě žádné laciné přibližné odhady. Chci plnohodnotné řešení, ale bez zbytečné dřiny.

Některé zkratky jsou nicméně v zásadě odhady, které jsou dost dobré na to, aby daný problém vyřešily. Sám jazyk je v určitém smyslu zkratkou. Slovo „židle“ je kupříkladu zkratkou celé řady různých věcí, na nichž se dá fyzicky (a dokonce i přeneseně) sedět. Není příliš efektivní mít pro každé ztělesnění židle vždy jiné slovo. Jazyk je velmi důmyslnou nízkodimenzionální reprezentací světa kolem nás, která nám umožňuje účinně komunikovat s ostatními a usnadňuje nám pohyb v mnohotvárném světě, v němž žijeme. Bez zkratky v podobě jediného slova pro řadu případů bychom byli zavaleni šumem.

Také si ukážeme, že i v matematice bývá často nezbytnou podmínkou nalezení zkratky pominutí nepodstatných informací. Základní myšlenkou topologie je geometrie bez měření. Pro toho, kdo jede londýnským metrem, bude pro nalezení správné cesty městem plánek ukazující pořadí a propojení jednotlivých stanic mnohem užitečnější než geograficky přesná mapa. Účinnými zkratkami mohou být také diagramy a grafy. Nejlepší z nich odhlíží od všeho, co je z hlediska pochopení problému vedlejší. Jak si ale ukážeme, mezi dobrou zkratkou a nebezpečnou manipulací bývá často jen tenká hranice.

Jedním z největších vynálezů, jaký lidé pro nacházení zkratek objevili, je kalkulus. Na toto malé matematické kouzlo spoléhají inženýři, kteří potřebují nalézt optimální řešení těžkých technických problémů. Teorie pravděpodobnosti a statistika nám zase poskytují zkratky, díky nimž se dokážeme vyznat v rozsáhlých souborech dat. A matematika nám často dokáže najít neefektivnější cestu složitou geometrickou strukturou nebo spleťtí sítí. Jedním z úžasných objevů, na které jsem přišel, když jsem propadl matematice, byla její schopnost nalézt zkratky i k cestám v nekonečnu. Zkratky, které nás dovedou z jednoho konce nekonečné cesty na druhý.

Kapitoly v knize nezačínají citátem, jak je obvyklé, nýbrž hádankou. K jejímu řešení lze často dojít dvěma způsoby: dlouhou dřinou, nebo zkratkou, pokud ji dokážeme nalézt. Každý z hlavolamů je možné řešit pomocí zkratky, o níž se v příslušné kapitole mluví. Bude dobré, když si hádanku rozlousknete předem, protože často to bývá tak, že čím víc času věnujete úsilí dostat se k cíli, tím víc oceníte zkratku, až si o ní přčtete.

Při svém putování matematikou jsem rovněž objevil, že existují různé druhy zkratek. Je proto nutné zdůraznit, že cesta, na niž se vydáváme a která nám pomůže dostat se k cíli rychleji, může mít více výchozích míst. Jedny zkratky už v terénu jsou a jen čekají, až je využijeme. Potřebovat budeme možná jen ukazatel správného směru nebo správnou mapu. Jsou ale i zkratky, které by bez naší usilovné práce existovat nemohly: prokopat tunel může trvat léta, jakmile je ale hotový, umožňuje dostat se na druhou stranu komukoli. Některé zkratky vyžadují úplně odhlédnout od okolí, v němž se nacházíme: jsou jako červí díry z jedné strany vesmíru na druhou. Dokážeme-li vykročit z mezí běžně vnímaného

světa, možná najdeme dimenzi, která nám ukáže, že dvě věci si jsou mnohem blíže, než jsme si mysleli. Existují zkratky, které urychlují cestu, zkratky, které snižují vzdálenost, již musíme urazit, nebo množství energie, které máme vynaložit. Vždy dosáhneme nějaké úspory, kvůli níž má cenu zkratku hledat.

Na své vlastní cestě jsem si ale také uvědomil, že existují situace, kdy zkratka nemá smysl. Někdy třeba nespěcháme a chceme si dát načas. Někdy je pro nás cílem cesta sama. Nebo se pokoušíme zhubnout a potřebujeme energii vydávat. Proč si zkracovat příjemnou procházku v přírodě? Proč si raději nepřečíst celý román a ne jeho výtah na Wikipedii? I v takových případech je ale dobré vědět, že máme možnost zkratky, byť se rozhodneme ji nevyužít.

Zkratka je do jisté míry odrazem našeho vztahu k času. Čím chceme strávit vymezený čas? Někdy je důležité zažít něco v čase a nemá příliš cenu hledat zkratku, která by nás o takový zážitek ošidila. Poslech hudební skladby nemá smysl krátit. V jiných případech je však život příliš krátký na to, abychom úsilí dostat se tam, kam chceme, věnovali delší dobu, než je nutné. Film dokáže zhusťt život do devadesáti minut. Divák nechce sledovat každý úkon, který hlavní postava udělá. Letíme-li na druhý konec světa, je to zkratka za pomalejší druhy přepravy, a naše dovolená v cílové destinaci bude díky tomu delší. Kdyby bylo možné let ještě víc zkrátit, většina z nás by toho využila. Jsou ale situace, kdy lidé chtějí zažít pomalou verzi přesunu do cíle. Poutě na svatá místa se zkratkami štítí. Filmové upoutávky nesledují, protože film na můj vkus zkracují až příliš. Je nicméně dobré mít na výběr.

V literatuře vedou zkratky obvykle k pohromě. Červená Karkulka by nenašla na vlka, kdyby při hledání zkratky lesem nesešla z cesty. V románu *Poutníková cesta* od Johna Bunyana se ti, kdo si ulehčují cestu kolem hory zvané Překážka, ztratí a zahynou. V *Pánovi prstenů* hobit Pipin ostatní členy výpravy upozorňuje, že „zkratkou si jenom zajdeš“, a bojí se, že nebudou mít dost času posedět ve vyhlášené hospodě na cestě, na což mu Frodo odpoví, „zkratkou si zajdeš, ale v hospodě se zasedíš“. Homer Simpson po katastrofální zajižďce na cestě do Drsnolandu nadává: „Slovo zkratka je propříště tabu.“ Nebezpečí zkratk je dobře shrnuto ve filmu *Ztřeštěná jízda*: „Jasně, že je to obtížné, je to přece zkratka. Kdyby to bylo snadné, byla by to jen ‚cesta‘.“ Záměrem této knihy je osvobodit myšlenku zkratky od těchto literárních konotací. Zkratka není dálnice do pekla, ale cesta ke svobodě.

ČLOVĚK PROTI STROJI

Jedním z podnětů, které mě přiměly k sepsání oslavy umění zkratky, je sílící představa, že lidská rasa bude nahrazena novým druhem, který se nebude muset obtěžovat hledáním zkratk.